




Quadratische Funktionen:

Inhalt:

| | |
|---|----|
| 1. Die Funktion $y = x^2$ | 2 |
| 2. Die Funktion $y = ax^2$ | 4 |
| 3. Die Funktion $y = ax^2 + c$ | 8 |
| 4. Die Funktion $y = (x - d)^2$ | 11 |
| 5. Die Funktion $y = (x - d)^2 + e$ | 14 |
| 6. Die Funktion $y = x^2 + bx + c$ | 17 |
| 7. Aufstellen der Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$ | 20 |
| 8. Checkliste | 23 |
| 9. Hinweise zur Benutzung | 25 |

Die vorliegende Unterrichtseinheit enthält folgende Elemente:

| | |
|---|--|
|  <p>Beispiel:</p> | Anhand von Beispielen werden neue Regeln, Definitionen und Kenntnisse eingeführt. Die Aufgaben in den Beispielen sind meist so gestellt, dass sie von den Schülerinnen und Schülern auch selbstständig bearbeitet werden können. |
|  <p>Merke:</p> | Die „Merkekästen“ stehen meist im Anschluss an ein einführendes Beispiel und fassen wichtige Regeln, Definitionen und Kenntnisse zusammen. Sie sollten von den Schülerinnen und Schülern unbedingt abgeschrieben werden. |
|  <p>Übung:</p> | Hier können die Schülerinnen und Schüler die gelernten Regeln und Kenntnisse üben und festigen. Im Anschluss an die Übungsaufgaben finden Sie jeweils die ausführlichen Lösungen dazu. |

1. Die Funktion $y = x^2$



Beispiel 1:

Berechne jeweils den Flächeninhalt eines Quadrats mit den Seitenlängen 1 cm, 2 cm, 3 cm und 7 cm. Welcher Flächeninhalt ergibt sich für die Seitenlänge x ?

Lösung:

Seitenlänge 1 cm: $A_1 = 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$

Seitenlänge 2 cm: $A_2 = 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$

Seitenlänge 3 cm: $A_3 = 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2$

Seitenlänge 7 cm: $A_7 = 7 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 49 \text{ cm}^2$

Bei der Seitenlänge x ist der Flächeninhalt: $A(x) = x^2$



Beispiel 2:

Erstelle für die Funktion $y = x^2$ eine Wertetabelle. Trage die Wertepaare $(x|y)$ in ein Achsenkreuz ein und verbinde sie zu einer Kurve. Was fällt auf ?

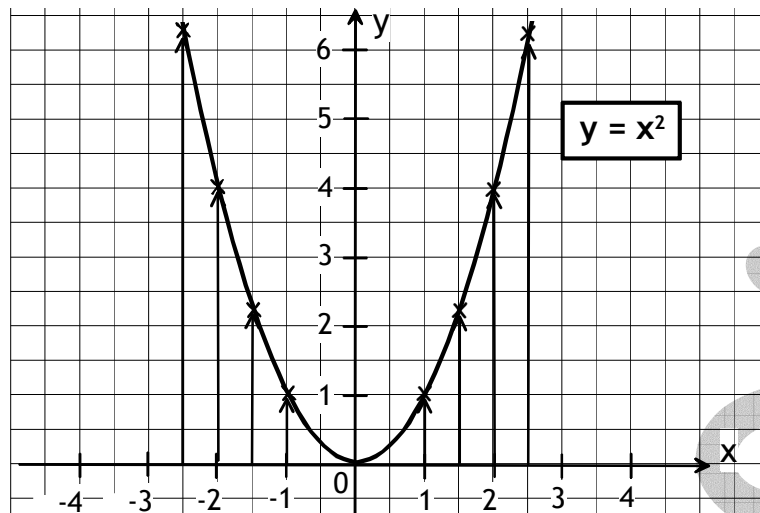
| | | | | | | | |
|-------------------|----|----|----|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y = x^2$ | | | | | | | |
| Wertepaar $(x y)$ | | | | | | | |

Lösung:

| | | | | | | | |
|-------------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y = x^2$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| Wertepaar $(x y)$ | (-3 9) | (-2 4) | (-1 1) | (0 0) | (1 1) | (2 4) | (3 9) |

Wegen $(-x)^2 = x^2$ haben entgegengesetzte x -Werte die gleichen y -Werte. Die Wertetabelle ist somit symmetrisch zur „0-Spalte“.

Schaubild:



Merke: Die Normalparabel



Die Funktion $y = x^2$ ist die einfachste quadratische Funktion. Ihr Schaubild verläuft spiegelsymmetrisch zur y-Achse und geht durch den Ursprung. Es wird **Normalparabel** genannt. Den tiefsten Punkt der Normalparabel nennt man **Scheitelpunkt**. Er ist mit dem Ursprung $O(0|0)$ identisch.



Übung:

Die beiden Punkte $P(3|y)$ und $Q(x|6,25)$ liegen auf der Normalparabel $y = x^2$. Berechne jeweils die fehlende Koordinate. Beachte: Bei Q gibt es zwei Lösungen.

Lösung:

- Einsetzen der x-Koordinate von $P(3|y)$ in $y = x^2$ ergibt: $y = 3^2 = 9$
Damit hat der Punkt P die Koordinaten: **$P(3|9)$**
- Einsetzen der y-Koordinate von $Q(x|6,25)$ in $y = x^2$ ergibt:

$$6,25 = x^2 \quad | \pm\sqrt{}$$

$$\Rightarrow x_1 = +2,5 \quad \text{und} \quad x_2 = -2,5$$

Damit hat der Punkt Q die Koordinaten $Q_1(2,5|6,25)$ oder $Q_2(-2,5|6,25)$.

2. Die Funktion $y = ax^2$



Beispiel 1:

Ergänze die Wertetabellen zu den Funktionen $y = \frac{1}{4}x^2$ und $y = 2x^2$ mithilfe der Wertetabelle von $y = x^2$ und zeichne die zugehörigen Schaubilder in ein Koordinatensystem.

Was fällt auf ?

Wertetabelle von $y = \frac{1}{4}x^2$:

| | | | | | | | | | |
|----------------------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y = x^2$ | | | | | | | | | |
| $y = \frac{1}{4}x^2$ | | | | | | | | | |

Wertetabelle von $y = 2x^2$:

| | | | | | | | | | |
|------------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|
| x | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| $y = x^2$ | | | | | | | | | |
| $y = 2x^2$ | | | | | | | | | |

Lösung:

Wertetabelle von $y = \frac{1}{4}x^2$:

| | | | | | | | | | |
|----------------------|----|------|----|------|---|------|---|------|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y = x^2$ | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| $y = \frac{1}{4}x^2$ | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 |

Man erhält die Werte von $y = \frac{1}{4}x^2$, indem man die Werte von $y = x^2$ mit $\frac{1}{4}$ multipliziert.

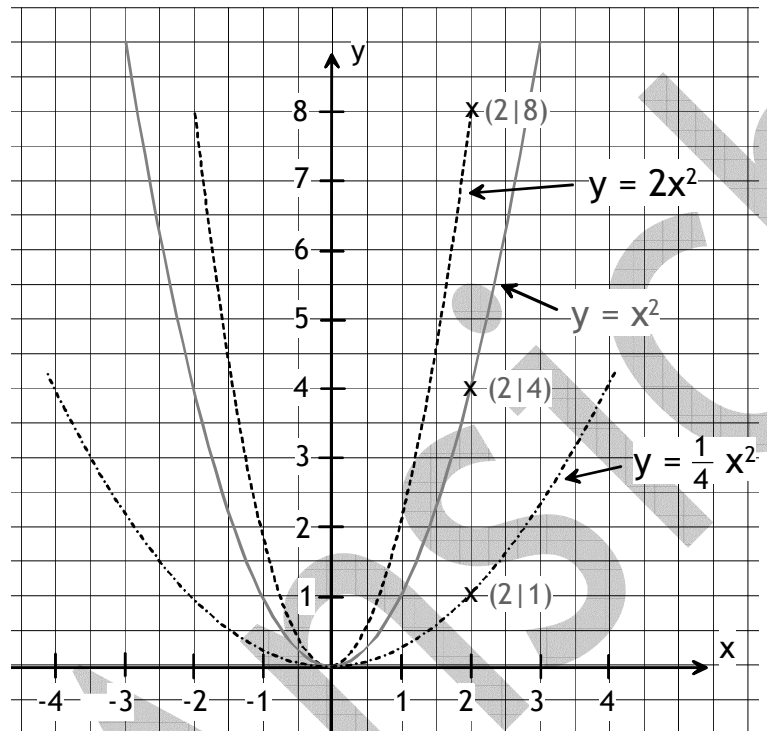
Wertetabelle von $y = 2x^2$:

| | | | | | | | | | |
|------------|----|------|----|------|---|------|---|------|---|
| x | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| $y = x^2$ | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 |
| $y = 2x^2$ | 8 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 |

Man erhält die Werte von $y = 2x^2$, indem man die Werte von $y = x^2$ mit 2 multipliziert.

Das Schaubild der Funktion $y = \frac{1}{4}x^2$ ist im Vergleich zur Normalparabel **breiter** bzw. **abgeflacht**.

Das Schaubild der Funktion $y = 2x^2$ ist im Vergleich zur Normalparabel **schlanker**.



Beispiel 2:

- a) Erstelle zu den Funktionen $y = -x^2$ und $y = -2x^2$ jeweils eine Wertetabelle von $x = -2$ bis $x = +2$ (Schrittweite 0,5) und zeichne ihre Schaubilder.
- b) Was fällt auf, wenn du mit den Schaubildern der Funktionen $y = x^2$ und $y = 2x^2$ vergleichst ?

Lösung:

a)

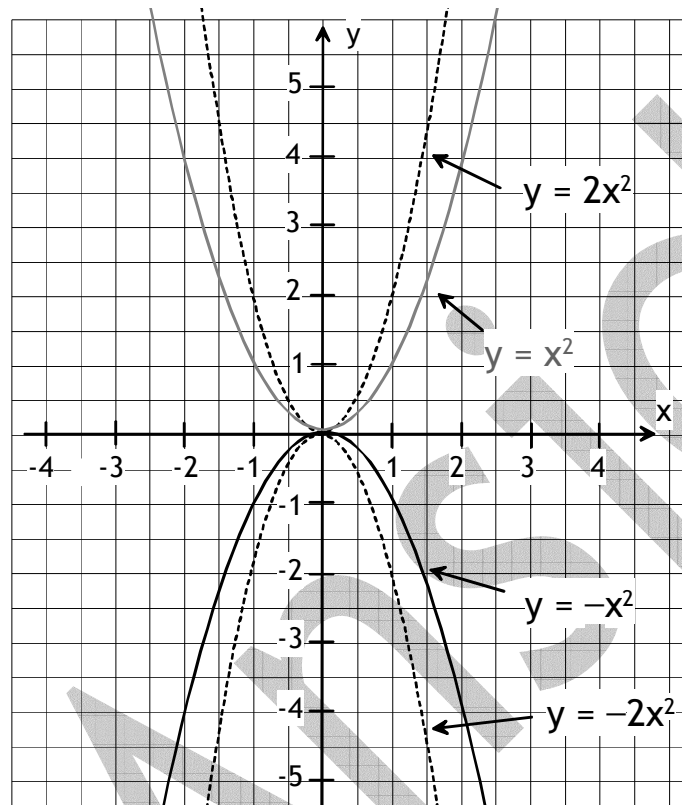
Wertetabelle von $y = -x^2$:

| | | | | | | | | | |
|---|----|-------|----|-------|---|-------|----|-------|----|
| x | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| y | -4 | -2,25 | -1 | -0,25 | 0 | -0,25 | -1 | -2,25 | -4 |

Wertetabelle von $y = -2x^2$:

| | | | | | | | | | |
|---|----|------|----|------|---|------|----|------|----|
| x | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| y | -8 | -4,5 | -2 | -0,5 | 0 | -0,5 | -2 | -4,5 | -8 |

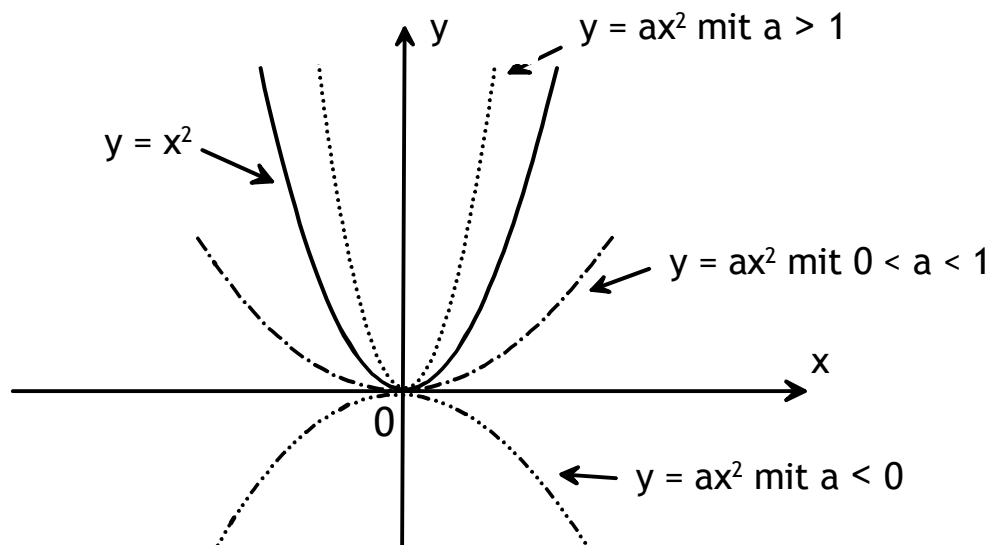
b)
 Die Schaubilder von $y = -x^2$ und $y = -2x^2$ sind gegenüber den Schaubildern von $y = x^2$ und $y = 2x^2$ an der x -Achse gespiegelt. Sie sind nach unten geöffnet.



Merke: Die Schaubilder von $y = ax^2$



1. Ist der Betrag von a größer als 1, dann ist das Schaubild der Funktion $y = ax^2$ im Vergleich zur Normalparabel **schlanker**.
2. Ist der Betrag von a kleiner als 1, dann ist das Schaubild der Funktion $y = ax^2$ im Vergleich zur Normalparabel **breiter**.
3. Ist a negativ, dann ist das Schaubild von $y = ax^2$ nach unten geöffnet. Der **Scheitelpunkt** von $y = ax^2$ ist immer der Ursprung $O(0|0)$.





Übung:

a) Beschreibe das Aussehen der Schaubilder von $y = \frac{1}{3}x^2$ und $y = -1,2x^2$, ohne die Schaubilder zu zeichnen.

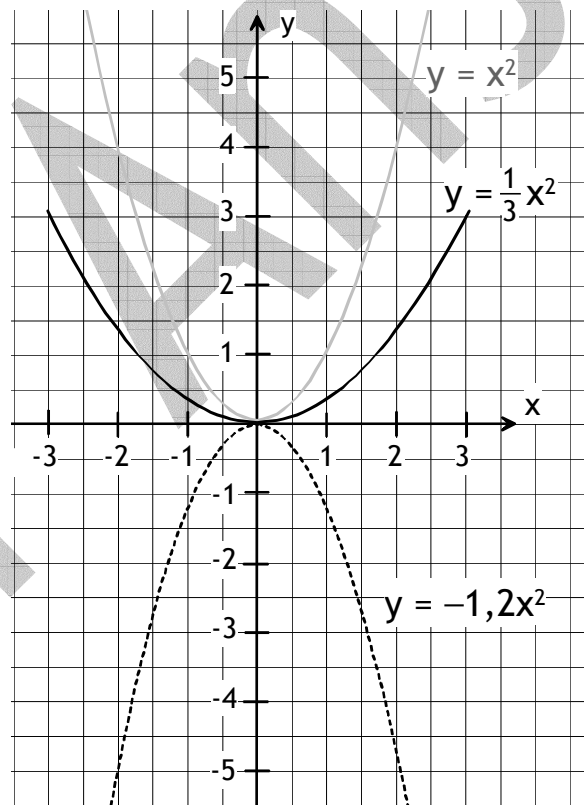
b) Überprüfe deine Antworten aus a), indem du mithilfe der jeweiligen Wertetabelle (von $x = -3$ bis $x = +3$) die Schaubilder der Funktionen $y = \frac{1}{3}x^2$ und $y = -1,2x^2$ zeichnest.

Tipp: Man kann die Werte der Wertetabellen leicht berechnen, indem man die y -Werte der Normalparabel mit dem entsprechenden Faktor multipliziert.

Lösung:

a)

- Die Parabel zu $y = \frac{1}{3}x^2$ geht durch O, ist nach oben geöffnet und gegenüber der Normalparabel abgeflacht.
- Die Parabel zu $y = -1,2x^2$ geht durch O, ist nach unten geöffnet und gegenüber der Normalparabel gestreckt.



b) Wertetabelle:

| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|----------------------|-------|------|------|------|------|------|---|------|------|------|------|------|-------|
| $y = x^2$ | 9 | 6,25 | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |
| $y = \frac{1}{3}x^2$ | 3 | 2,1 | 1,33 | 0,75 | 0,33 | 0,1 | 0 | 0,1 | 0,33 | 0,75 | 1,33 | 2,1 | 3 |
| $y = -1,2x^2$ | -10,8 | -7,5 | -4,8 | -2,7 | -1,2 | -0,3 | 0 | -0,3 | -1,2 | -2,7 | -4,8 | -7,5 | -10,8 |

3. Die Funktion $y = ax^2 + c$



Beispiel:

- a) Erstelle für folgende Funktionen jeweils eine Wertetabelle und zeichne das entsprechende Schaubild.
- Für $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ von $x = -4$ bis $x = +4$ (Schrittweite 1)
 - Für $y = 2x^2 - 4$ von $x = -2$ bis $x = +2$ (Schrittweite 0,5)
- b) Wo liegt jeweils der Scheitelpunkt? Überlege dir dazu, bei welchem x-Wert der y-Wert am kleinsten wird.
- c) Was fällt beim Vergleich mit den Parabeln von $y = \frac{1}{4}x^2$ und $y = 2x^2$ auf?

Lösung:

a) Wertetabelle von $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$:

| | | | | | | | | | |
|---|----|------|----|------|---|------|---|------|---|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 5 | 3,25 | 2 | 1,25 | 1 | 1,25 | 2 | 3,25 | 5 |

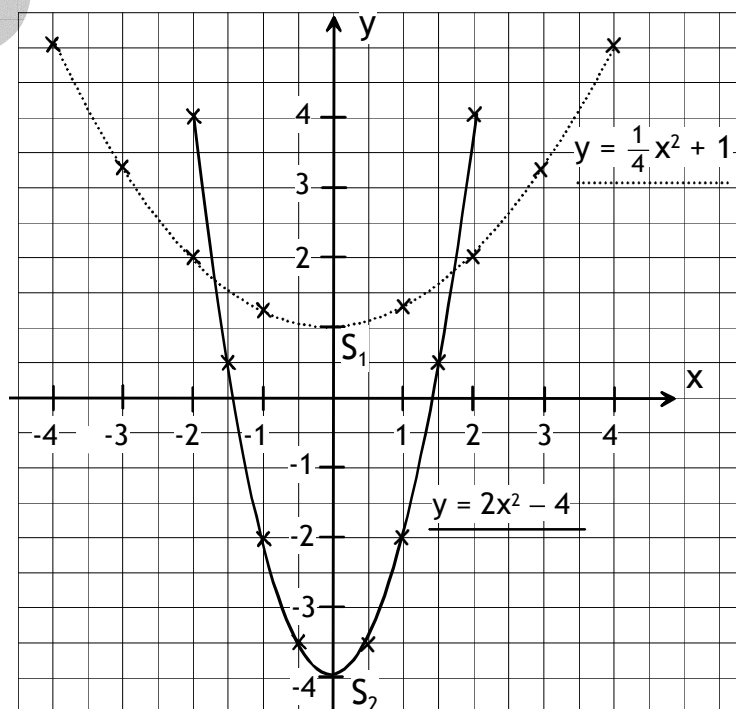
Wertetabelle von $y = 2x^2 - 4$:

| | | | | | | | | | |
|---|----|------|----|------|----|------|----|-----|---|
| x | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| y | 4 | 0,5 | -2 | -3,5 | -4 | -3,5 | -2 | 0,5 | 4 |

- b)
- Der Scheitelpunkt von $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ist $S_1(0|1)$, weil der Term $\frac{1}{4}x^2 + 1$ für $x = 0$ am kleinsten wird.
- Der Scheitelpunkt von $y = 2x^2 - 4$ ist $S_2(0|-4)$, weil der Term $2x^2 - 4$ für $x = 0$ am kleinsten wird.

Beachte:

Da „ x^2 “ für jeden beliebigen x-Wert immer positiv ist, nimmt „ x^2 “ den kleinsten Wert für $x = 0$ an.

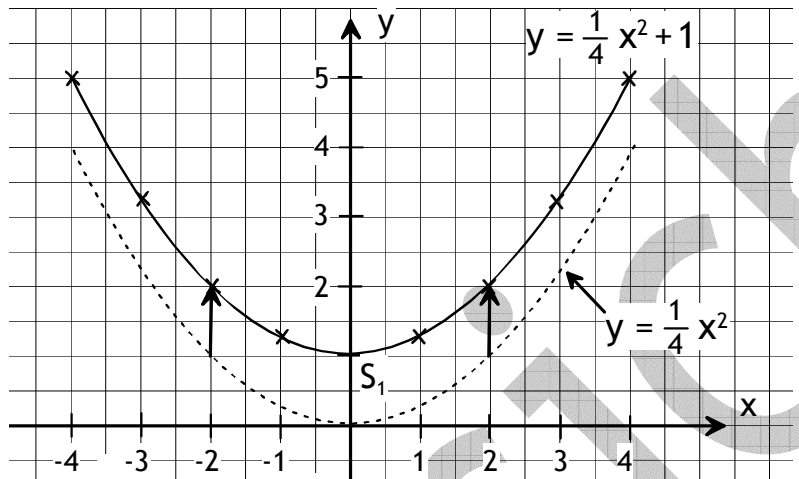


c)

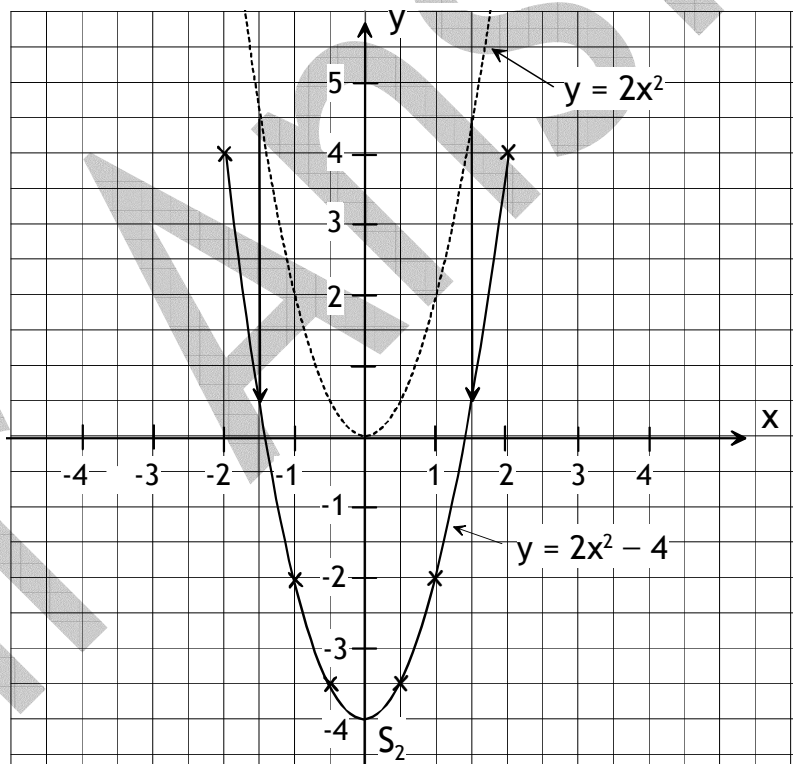
Die Parabel von $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ist im

Vergleich zum Schaubild von $y = \frac{1}{4}x^2$

um 1 Längeneinheit nach oben verschoben.



Die Parabel von $y = 2x^2 - 4$ ist im Vergleich zum Schaubild von $y = 2x^2$ um 4 Längeneinheiten nach unten verschoben.

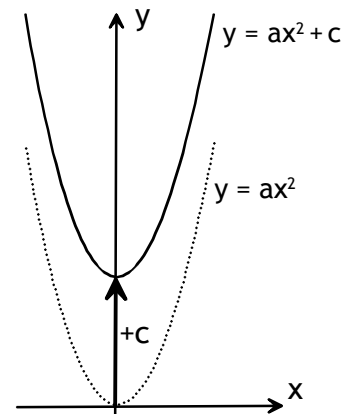


Merke: Das Schaubild von $y = ax^2 + c$



Das Schaubild von $y = ax^2 + c$ ist gegenüber dem Schaubild von $y = ax^2$ um c Längeneinheiten nach oben verschoben; bei negativem c -Wert nach unten. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(0|c)$.

Beachte: Der Faktor a hat keinen Einfluss auf die Lage des Scheitelpunkts!





Übung 1:

Gib die Koordinaten des Scheitelpunkts an und entscheide, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist und ob sie schmaler oder breiter als die Normalparabel verläuft.

- a) $y = 3x^2 - 4$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ c) $y = -x^2 - 1$ d) $y = \frac{2}{5}x^2 + 5$

Lösung:

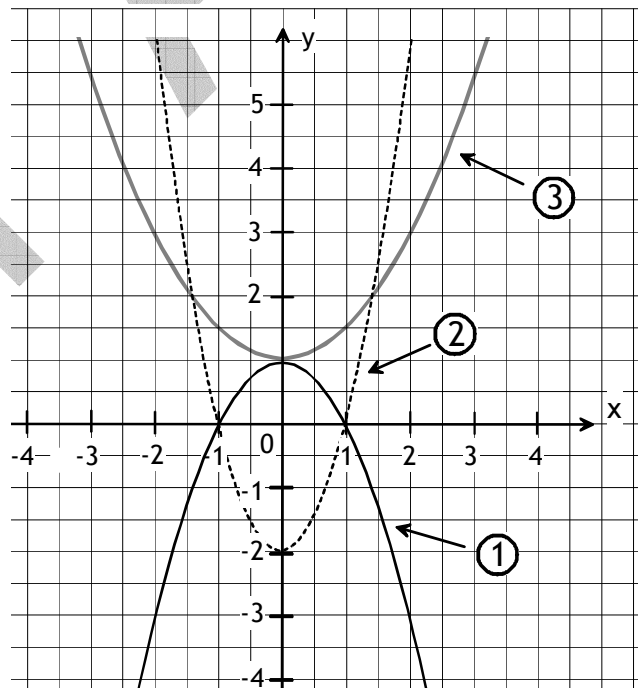
- a) S(0|-4) ; nach oben geöffnet, schmaler als die Normalparabel
 b) S(0|2) ; nach unten geöffnet, breiter als die Normalparabel
 c) S(0|-1) ; nach unten geöffnet, gleich breit wie die Normalparabel
 d) S(0|5) ; nach oben geöffnet, breiter als die Normalparabel



Übung 2:

Ordne den Schaubildern die richtige Funktionsgleichung zu und begründe deine Entscheidung:

- a) $y = 2x^2 - 2$
 b) $y = -x^2 + 1$
 c) $y = 0,5x^2 + 1$



Lösung:

Die Parabel ① muss zur Funktionsgleichung $y = -x^2 + 1$ gehören, weil sie nach unten geöffnet ist und ihren Scheitel bei A(0|1) hat.

Die Parabel ② muss zur Funktionsgleichung $y = 2x^2 - 2$ gehören, weil sie ihren Scheitel bei B(0|-2) hat, nach oben geöffnet ist und steiler verläuft als die Normalparabel.

Die Parabel ③ muss zur Funktionsgleichung $y = 0,5x^2 + 1$ gehören, weil sie ihren Scheitel bei C(0|1) hat, nach oben geöffnet ist und flacher verläuft als die Normalparabel.

4. Die Funktion $y = (x - d)^2$



Beispiel:

a) Ergänze für die Funktionen $y = (x - 3)^2$ und $y = (x + 1)^2$ folgende Wertetabellen und zeichne die zugehörigen Schaubilder:

Wertetabelle von $y = (x - 3)^2$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| y | | | | | | | | | |

Wertetabelle von $y = (x + 1)^2$:

| | | | | | | | | | |
|---|----|------|----|------|----|------|---|-----|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 |
| y | | | | | | | | | |

b) Wo liegt jeweils der Scheitelpunkt der Parabeln? Überlege dir dazu, für welchen x-Wert der y-Wert am kleinsten wird.

c) Was fällt auf, wenn du beide Parabeln mit der Normalparabel vergleichst?

Lösung:

a)

Wertetabelle von $y = (x - 3)^2$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|------|---|------|---|------|---|------|---|
| x | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| y | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 |

Wertetabelle von $y = (x + 1)^2$:

| | | | | | | | | | |
|---|----|------|----|------|----|------|---|------|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 |
| y | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 |

b)

Da die Quadratklammer von $y = (x - 3)^2$ für keinen x-Wert negativ werden kann, nimmt sie für $x = 3$ den kleinsten Wert an, nämlich 0.

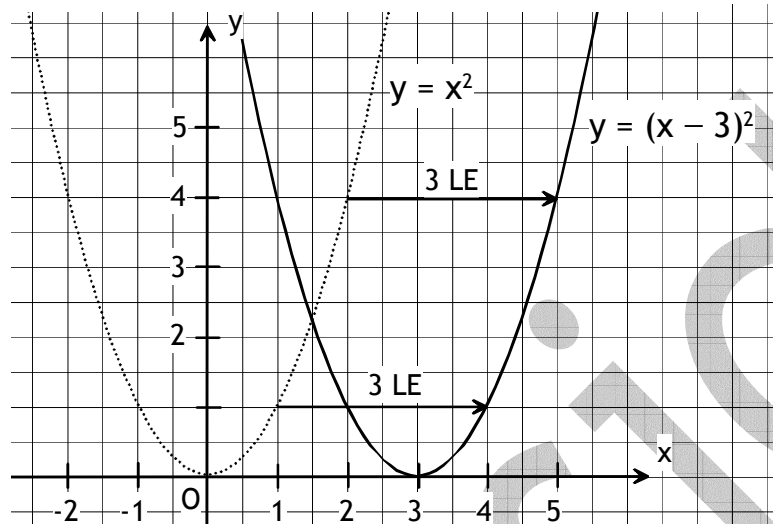
Der Scheitelpunkt von $y = (x - 3)^2$ ist somit $S_1(3 | 0)$.

Mit der gleichen Überlegung erhält man den Scheitelpunkt von $y = (x + 1)^2$.

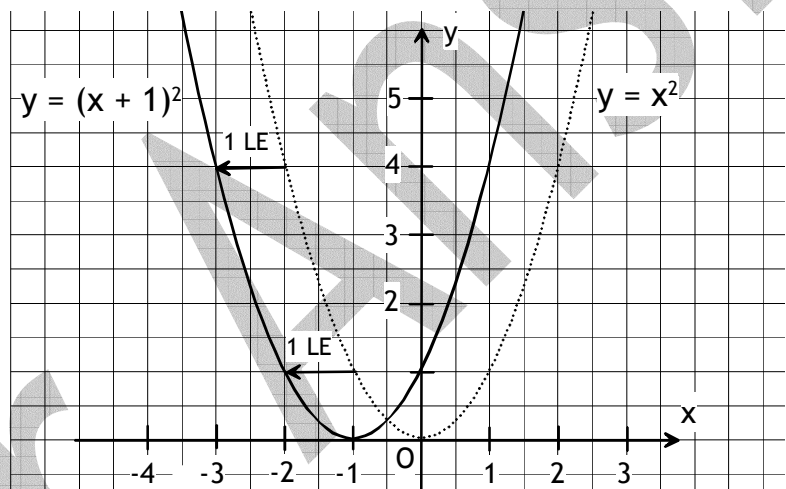
Es ist $S_2(-1 | 0)$.

c)

Die Parabel von $y = (x - 3)^2$ ist gegenüber der Normalparabel um **3 Längeneinheiten nach rechts** verschoben.



Die Parabel von $y = (x + 1)^2$ ist gegenüber der Normalparabel um **1 Längeneinheit nach links** verschoben.

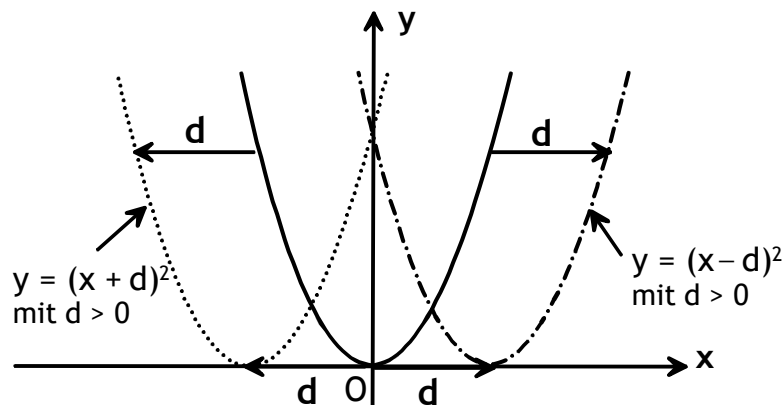


Merke: Die Schaubilder von $y = (x - d)^2$ und $y = (x + d)^2$



Das Schaubild von $y = (x - d)^2$ (mit $d > 0$) ist gegenüber der Normalparabel um **d Längeneinheiten nach rechts** verschoben. Der Scheitel hat die Koordinaten $S(d | 0)$.

Das Schaubild von $y = (x + d)^2$ (mit $d > 0$) ist gegenüber der Normalparabel um **d Längeneinheiten nach links** verschoben. Der Scheitel hat die Koordinaten $S(-d | 0)$.





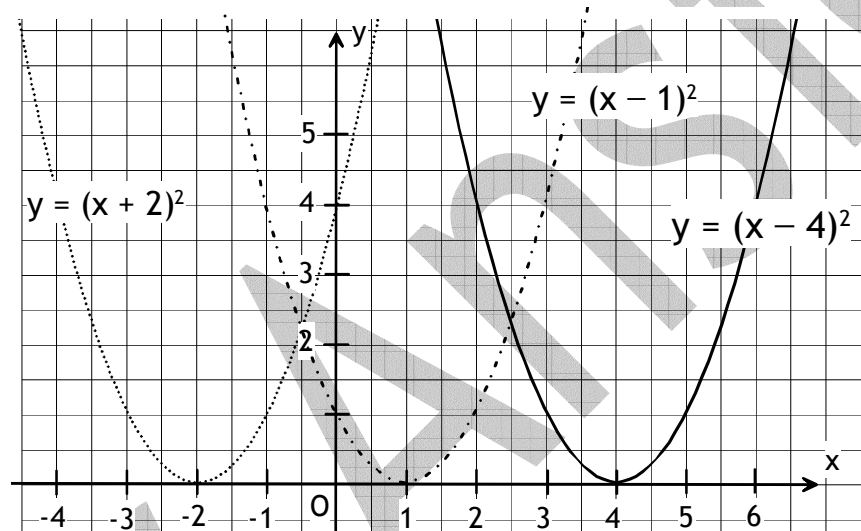
Übung 1:

Gib die Koordinaten des Scheitelpunkts an und zeichne mithilfe der Parabelschablone das entsprechende Schaubild.

- a) $y = (x + 2)^2$ b) $y = (x - 1)^2$ c) $y = (x - 4)^2$

Lösung:

- a) S(-2|0)
 b) S(1|0)
 c) S(4|0)



Übung 2:

Die Funktion $y = (x - d)^2$ hat den Scheitelpunkt S(-5|0). Berechne die fehlenden Koordinaten von A(1|___) und B(-4|___).

Lösung:

Mit dem Scheitelpunkt S(-5|0) lautet die Funktionsgleichung:

$$y = (x - (-5))^2$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 5)^2$$

- Punkt A(1|___):

Einsetzen von $x = 1$ ergibt: $y = (1 + 5)^2 = 36$. Damit ist **A(1|36)**.

- Punkt B(-4|___):

Einsetzen von $x = -4$ ergibt: $y = (-4 + 5)^2 = 1$. Damit ist **B(-4|1)**.

5. Die Funktion $y = (x - d)^2 + e$



Beispiel:

a) Ergänze folgende Wertetabelle und zeichne die Schaubilder beider Funktionen.

| | | | | | | | | | |
|---------------------|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| $y = (x - 3)^2$ | | | | | | | | | |
| $y = (x - 3)^2 + 2$ | | | | | | | | | |

b) Wo würdest du den Scheitelpunkt der Funktion $y = (x - 3)^2 + 2$ vermuten ?
Überlege dir dazu, für welchen x-Wert der y-Wert am kleinsten wird.

c) Vergleiche das Schaubild von $y = (x - 3)^2 + 2$ mit der Normalparabel und dem Schaubild von $y = (x - 3)^2$. Was fällt auf ?

Lösung:

a) Wertetabelle:

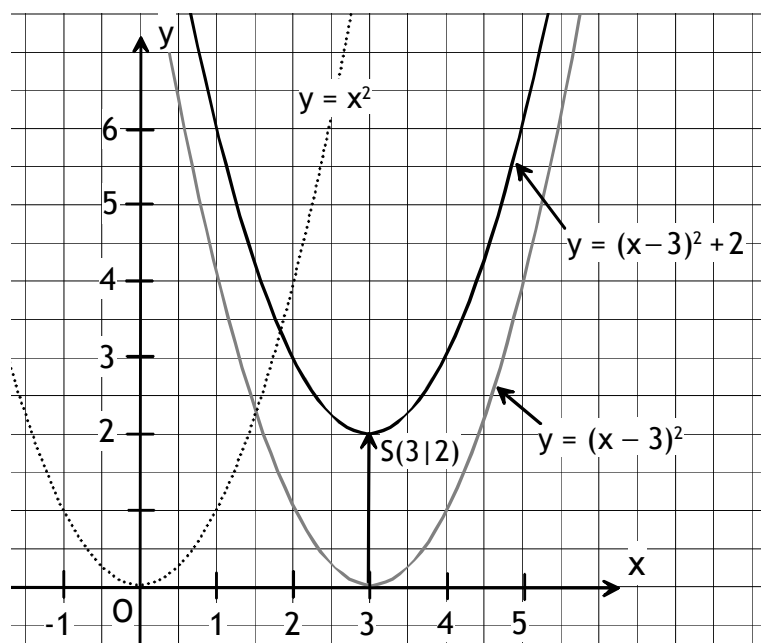
| | | | | | | | | | |
|---------------------|---|------|---|------|---|------|---|------|---|
| x | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| $y = (x - 3)^2$ | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 |
| $y = (x - 3)^2 + 2$ | 6 | 4,25 | 3 | 2,25 | 2 | 2,25 | 3 | 4,25 | 6 |

b) Da die Quadratklammer $(x - 3)^2$ für keinen x-Wert negativ werden kann, wird der y-Wert von $y = (x - 3)^2 + 2$ dann am kleinsten, wenn $(x - 3)^2 = 0$ ist. Das ist bei $x = 3$ der Fall. Der Scheitelpunkt von $y = (x - 3)^2 + 2$ ist somit **S(3 | 2)**.

c) Das Schaubild von $y = (x - 3)^2 + 2$ ist gegenüber der Normalparabel um **3 Längeneinheiten nach rechts** und um **2 Längeneinheiten nach oben** verschoben.

Dies sieht man auch an der Wertetabelle:

Für den gleichen x-Wert unterscheiden sich die y-Werte jeweils um 2.

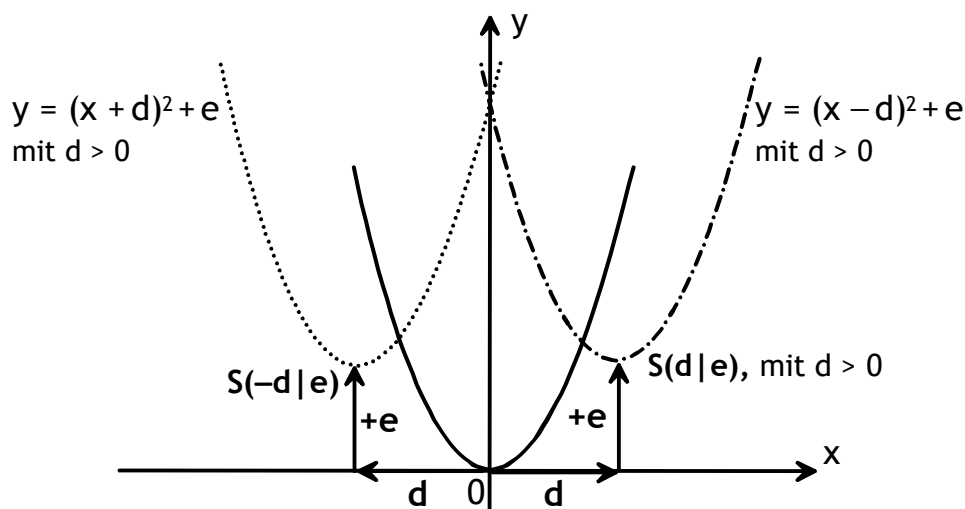


Merke: Die Schaubilder von $y = (x - d)^2 + e$ und $y = (x + d)^2 + e$



Das Schaubild von $y = (x - d)^2 + e$ (mit $d > 0$) ist gegenüber der Normalparabel um d Längeneinheiten nach rechts und um e Längeneinheiten nach oben verschoben. Bei negativem e -Wert ist es nach unten verschoben. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(d | e)$.

Das Schaubild von $y = (x + d)^2 + e$ (mit $d > 0$) ist gegenüber der Normalparabel um d Längeneinheiten nach links und um e Längeneinheiten nach oben verschoben. Bei negativem e -Wert ist es nach unten verschoben. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(-d | e)$.



Man nennt eine Parabelgleichung der Art $y = (x - d)^2 + e$ **Scheitelform**, weil man an ihr direkt die Scheitelkoordinaten ablesen kann.



Übung 1:

Bestimme die Koordinaten der Scheitelpunkte folgender Funktionen und zeichne mithilfe der Parabelschablone die entsprechenden Schaubilder.

a) $y = (x - 2)^2 + 1$

b) $y = (x + 1)^2 - 2$

c) $y = (x - 4)^2 - 1$

Lösung:

a) S(2|1)

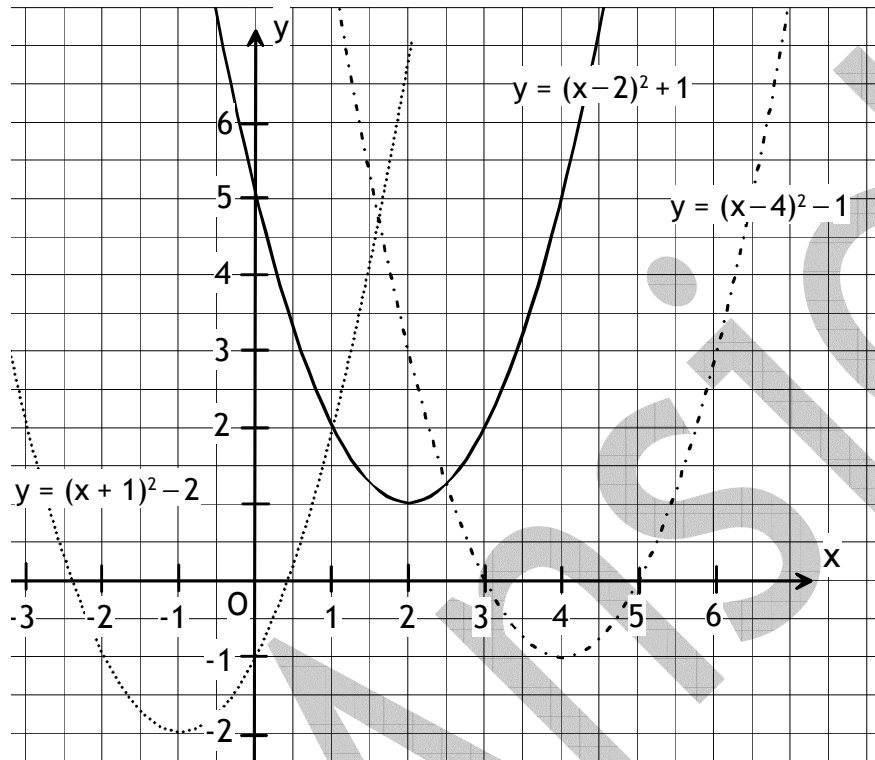
b) Beachte:

$$y = (x + 1)^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow y = (x - (-1))^2 - 2$$

Damit ist S(-1|-2).

c) S(4|-1)



Übung 2:

Gib jeweils die Funktionsgleichung an, wenn eine verschobene Normalparabel folgenden Scheitelpunkt hat.

a) S(3|-1)

b) S(-3|1)

c) S(-1|3)

d) S(1|-3)

Lösung:

a) Es ist $d = 3$ und $e = -1$. Einsetzen in $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - 3)^2 + (-1) \Leftrightarrow y = (x - 3)^2 - 1$$

b) Es ist $d = -3$ und $e = 1$. Einsetzen in $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - (-3))^2 + 1 \Leftrightarrow y = (x + 3)^2 + 1$$

c) Es ist $d = -1$ und $e = 3$. Einsetzen in $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - (-1))^2 + 3 \Leftrightarrow y = (x + 1)^2 + 3$$

d) Es ist $d = 1$ und $e = -3$. Einsetzen in $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - 1)^2 + (-3) \Leftrightarrow y = (x - 1)^2 - 3$$

6. Die Funktion $y = x^2 + bx + c$



Beispiel 1:

a) Ergänze für die Funktion $y = x^2 + 4x + 3$ folgende Wertetabelle und zeichne das Schaubild.

| | | | | | | | | | | |
|---|----|------|----|------|----|------|----|------|---|-----|
| x | -4 | -3,5 | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 |
| y | | | | | | | | | | |

b) Wo würdest du den Scheitelpunkt vermuten ?

c) Versuche, die Scheitelkoordinaten zu berechnen, indem du die Funktionsgleichung $y = x^2 + 4x + 3$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ umwandelst.

Tipp: Welche Zahl gehört in das Kästchen, damit du auf die ersten drei Summanden eine binomische Formel anwenden kannst ? $y = x^2 + 4x + \square + 3 - \square$.

Lösung:

a) Wertetabelle von $y = x^2 + 4x + 3$:

| | | | | | | | | | | |
|---|----|------|----|-------|----|-------|----|------|---|------|
| x | -4 | -3,5 | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 |
| y | 3 | 1,25 | 0 | -0,75 | -1 | -0,75 | 0 | 1,25 | 3 | 5,25 |

b) Dem Schaubild zufolge liegt der Scheitelpunkt bei **S(-2 | -1)**.

c) Die Funktionsgleichung $y = x^2 + 4x + 3$ kann mithilfe einer **quadratischen Ergänzung** in die Scheitelform umgeformt werden:

$$y = x^2 + 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 3 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 4 + 3 - 4$$

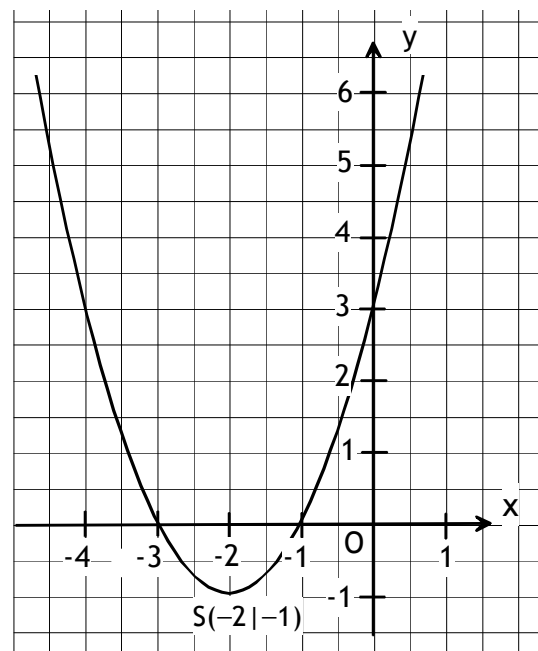
Mit der ersten binomischen Formel ist $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Damit folgt:

$$y = x^2 + 4x + 4 + 3 - 4$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 2)^2 - 1$$

Die Scheitelkoordinaten sind also **S(-2 | -1)**.



Merke: Die Scheitelkoordinaten von $y = x^2 + bx + c$



Zur Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunkts der Funktion $y = x^2 + bx + c$ muss man die Funktionsgleichung mithilfe einer **quadratischen Ergänzung** in die Scheitelform umwandeln. Die Umformungsschritte sind:

$$y = x^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

Der Scheitelpunkt von $y = x^2 + bx + c$ hat die Koordinaten $S\left(-\frac{b}{2} \mid c - \frac{b^2}{4}\right)$.



Übung:

Wandle mithilfe einer quadratischen Ergänzung in die Scheitelform um und bestimme die Koordinaten der Scheitelpunkte. Zeichne die entsprechenden Schaubilder.

- a) $y = x^2 + 6x + 5$ b) $y = x^2 - 5x + 3$ c) $y = x^2 - 8x + 17$ d) $y = x^2 + 4x + 7$

Lösung:

a)

$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 5 - \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 6x + 9 + 5 - 9$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 3)^2 - 4$$

Die Scheitelkoordinaten sind: $S_a(-3 \mid -4)$.

b)

$$y = x^2 - 5x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 5x + 6,25 + 3 - 6,25$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 2,5)^2 - 3,25$$

Die Scheitelkoordinaten sind: $S_b(2,5 \mid -3,25)$.

c)

$$y = x^2 - 8x + 17$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 17 - \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 8x + 16 + 17 - 16$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 4)^2 + 1$$

Die Scheitelkoordinaten sind: $S_c(4 | 1)$.

d)

$$y = x^2 + 4x + 7$$

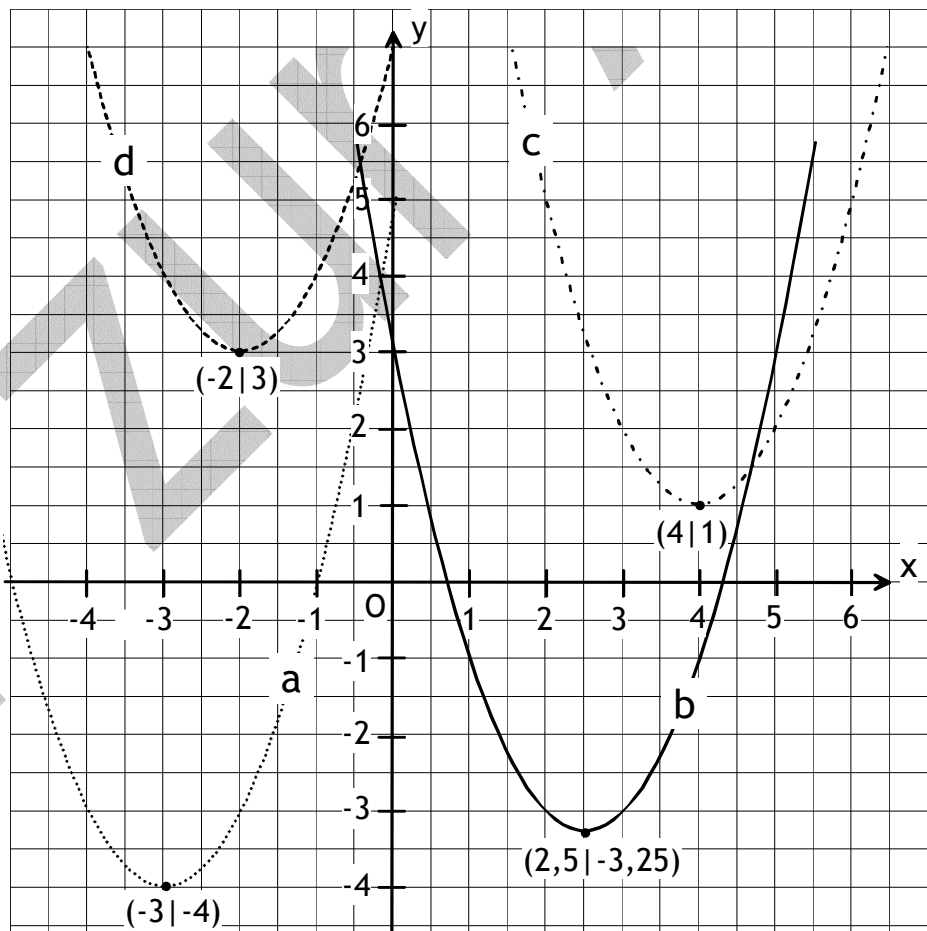
$$\Leftrightarrow y = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 7 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 4 + 7 - 4$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 2)^2 + 3$$

Die Scheitelkoordinaten sind: $S_d(-2 | 3)$.

Schaubilder:



7. Aufstellen der Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$



Beispiel 1: (bekannt ist der Scheitelpunkt der Parabel)

Wie lautet die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel, deren Scheitel bei $S(-3|4)$ liegt? Gib die Parabelgleichung in der Form $y = x^2 + bx + c$ an.

Lösung:

1. Schritt: *Einsetzen in die Scheitelform*

Einsetzen von $d = -3$ und $e = 4$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - (-3))^2 + 4 \quad \text{bzw.} \quad y = (x + 3)^2 + 4$$

2. Schritt: *Umformen in die allgemeine Parabelgleichung (Normalform)*

Durch Ausmultiplizieren der Klammer erhält man die Parabelgleichung in der Form $y = x^2 + bx + c$:

$$\begin{aligned} y &= (x + 3)^2 + 4 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 6x + 9 + 4 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 6x + 13 \end{aligned}$$



Beispiel 2: (bekannt sind zwei Punkte der Parabel)

a) Wie lautet die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel, die durch die Punkte $A(1|5)$ und $B(4|2)$ geht?

b) Überprüfe deine Rechnung, indem du die Lage des Scheitelpunkts bestimmst und das Schaubild zeichnest.

Lösung:

a) Funktionsgleichung der Parabel

1. Schritt: *Einsetzen der Punktkoordinaten in $y = x^2 + bx + c$*

Durch jeweiliges Einsetzen der Punktkoordinaten in die Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$ erhält man zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Mit } A(1|5) : \quad & 5 = 1^2 + b \cdot 1 + c \\ \Leftrightarrow & 5 = 1 + 1b + c \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } B(4|2) : \quad & 2 = (4)^2 + b \cdot (4) + c \\ \Leftrightarrow & 2 = 16 + 4b + c \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

2. Schritt: Berechnen von b

Wenn man beide Gleichungen übereinander schreibt und dann die untere von der oberen abzieht, fällt die Variable c heraus:

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & 1 + 1b + c & \text{(I)} \\ 2 & = & 16 + 4b + c & \text{(II)} \\ \hline 3 & = & -15 - 3b & \text{(III) = (I) - (II)} \end{array}$$

Aus Gleichung (III) erhält man den Wert für b :

$$\begin{array}{l} 3 = -15 - 3b \quad | +15 \\ \Leftrightarrow 18 = -3b \quad | :(-3) \\ \Leftrightarrow -6 = b \text{ bzw. } b = -6 \end{array}$$

3. Schritt: Berechnen von c

Den Wert für c erhält man, indem man $b = -6$ in Gleichung (I) oder in Gleichung (II) einsetzt. Einsetzen von $b = -6$ in die Gleichung (I) $5 = 1 + 1b + c$ ergibt:

$$\begin{array}{l} 5 = 1 + 1 \cdot (-6) + c \\ \Leftrightarrow 5 = 1 - 6 + c \\ \Leftrightarrow 5 = -5 + c \quad | +5 \\ \Leftrightarrow 10 = c \text{ bzw. } c = 10 \end{array}$$

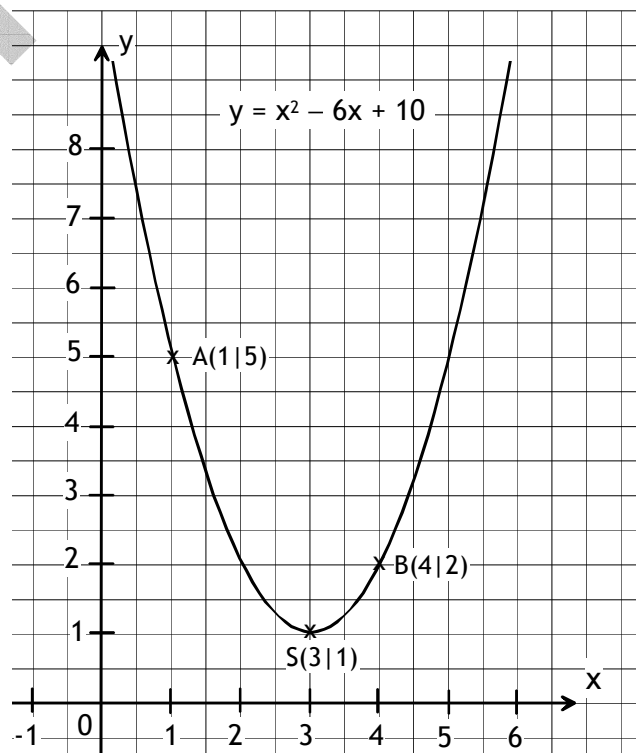
Die Funktionsgleichung der Parabel lautet also: $y = x^2 - 6x + 10$

b)

Umwandeln in die Scheitelform ergibt:

$$\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 10 \\ \Leftrightarrow y = x^2 - 6x + 9 + 10 - 9 \\ \Leftrightarrow y = (x - 3)^2 + 1 \end{array}$$

Damit hat der Scheitelpunkt die Koordinaten $S(3 | 1)$.





Übung 1:

Wie lautet die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(5|-2)$? Gib die Parabelgleichung in der Form $y = x^2 + bx + c$ an.

Lösung:

Einsetzen von $d = 5$ und $e = -2$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - 5)^2 + (-2) \text{ bzw. } y = (x - 5)^2 - 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 10x + 23$$



Übung 2:

Wie lautet die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel, die durch die Punkte $A(-2|17)$ und $B(3|7)$ geht?

Lösung:

1. Schritt: Einsetzen der Punktkoordinaten in $y = x^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} \text{Mit } A(-2|17): \quad 17 &= (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ \Leftrightarrow 17 &= 4 - 2b + c \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } B(3|7): \quad 7 &= 3^2 + b \cdot 3 + c \\ \Leftrightarrow 7 &= 9 + 3b + c \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

2. Schritt: Berechnen von b

$$17 = 4 - 2b + c \quad (\text{I})$$

$$7 = 9 + 3b + c \quad (\text{II})$$

$$10 = -5 - 5b \quad (\text{III}) = (\text{I}) - (\text{II})$$

$$\Leftrightarrow 15 = -5b \quad | :(-5)$$

$$\Leftrightarrow -3 = b \text{ bzw. } b = -3$$

3. Schritt: Berechnen von c

Einsetzen von $b = -3$ in die Gleichung (I) $17 = 4 - 2b + c$ ergibt:

$$17 = 4 - 2 \cdot (-3) + c$$

$$\Leftrightarrow 17 = 4 + 6 + c$$

$$\Leftrightarrow 17 = 10 + c \quad | -10$$

$$\Leftrightarrow 7 = c \text{ bzw. } c = 7$$

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet also: $y = x^2 - 3x + 7$

1) Wie bezeichnet man das Schaubild der Funktion $y = x^2$ und welche Eigenschaften hat es ?

2) Wie erstellt man mithilfe einer Funktionsgleichung eine Wertetabelle ?

3) Wie zeichnet man anhand einer Wertetabelle das Schaubild einer Funktion ?

4) Welchen Einfluss hat der Parameter a in $y = a \cdot x^2$ auf das Aussehen einer Parabel ?

5) Ein Punkt P , von dem nur eine Koordinate bekannt ist, liegt auf dem Schaubild einer Funktion. Wie berechnet man dann mithilfe der Funktionsgleichung die fehlende Koordinate ?

6) Wo liegt der Scheitelpunkt von Funktionen der Art $y = a \cdot x^2 + c$?

7) Wie geht das Schaubild der Funktion $y = a \cdot x^2 + c$ aus dem Schaubild von $y = a \cdot x^2$ hervor ?

8) Wo liegt der Scheitelpunkt von Funktionen der Art $y = (x - d)^2$?

9) Wie geht das Schaubild der Funktion $y = (x - d)^2$ aus dem Schaubild von $y = x^2$ hervor ?

10) Wie bezeichnet man eine Parabelgleichung der Art $y = (x - d)^2 + e$ und wo liegt der Scheitelpunkt ?

11) Wie bestimmt man den Scheitelpunkt der Funktion $y = x^2 + bx + c$?

12) Wie stellt man die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel auf, wenn man deren Scheitelkoordinaten kennt? Beschreibe die allgemeine Vorgehensweise.

13) Wie stellt man die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel auf, wenn man zwei Punkte kennt, die auf der Parabel liegen? Beschreibe die allgemeine Vorgehensweise.

Antworten zur Checkliste:

- 1) Das Schaubild von $y = x^2$ wird als Normalparabel bezeichnet. Es geht durch den Ursprung 0 und verläuft symmetrisch zur y-Achse.
- 2) Man berechnet mit der Funktionsgleichung zu unterschiedlichen x-Werten die zugehörigen y-Werte.
- 3) Indem man die Punkte der Wertetabelle in ein Achsenkreuz einträgt und miteinander verbindet.
- 4) Ist der Betrag von a größer als 1, verläuft das Schaubild schlanker als die Normalparabel. Ist der Betrag von a kleiner als 1, verläuft das Schaubild breiter als die Normalparabel. Bei negativen a-Werten ist die Parabel nach unten geöffnet.
- 5) Man setzt die bekannte Punktkoordinate in die Funktionsgleichung ein und berechnet daraus die fehlende Punktkoordinate.
- 6) $S(0|c)$
- 7) Das Schaubild von $y = a \cdot x^2 + c$ ist um c Längeneinheiten gegenüber dem Schaubild von $y = a \cdot x^2$ nach oben (bei negativem c-Wert nach unten) verschoben.
- 8) $S(d|0)$
- 9) Das Schaubild von $y = (x - d)^2$ ist um d Längeneinheiten gegenüber der Normalparabel nach rechts (bei negativem d-Wert nach links) verschoben.
- 10) Scheitelform, $S(d|e)$
- 11) Man muss $y = x^2 + bx + c$ mit einer **quadratischen Ergänzung** in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ umwandeln. Daran kann man dann direkt die Koordinaten des Scheitelpunkts ablesen.
- 12) Man setzt die Koordinaten von $S(d|c)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ein.
- 13) Man setzt jeweils die Koordinaten beider Punkte in die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ ein und löst das resultierende Gleichungssystem nach b und c auf.

✕

Antworten zur Checkliste:

- 1) Das Schaubild von $y = x^2$ wird als Normalparabel bezeichnet. Es geht durch den Ursprung 0 und verläuft symmetrisch zur y-Achse.
- 2) Man berechnet mit der Funktionsgleichung zu unterschiedlichen x-Werten die zugehörigen y-Werte.
- 3) Indem man die Punkte der Wertetabelle in ein Achsenkreuz einträgt und miteinander verbindet.
- 4) Ist der Betrag von a größer als 1, verläuft das Schaubild schlanker als die Normalparabel. Ist der Betrag von a kleiner als 1, verläuft das Schaubild breiter als die Normalparabel. Bei negativen a-Werten ist die Parabel nach unten geöffnet.
- 5) Man setzt die bekannte Punktkoordinate in die Funktionsgleichung ein und berechnet daraus die fehlende Punktkoordinate.
- 6) $S(0|c)$
- 7) Das Schaubild von $y = a \cdot x^2 + c$ ist um c Längeneinheiten gegenüber dem Schaubild von $y = a \cdot x^2$ nach oben (bei negativem c-Wert nach unten) verschoben.
- 8) $S(d|0)$
- 9) Das Schaubild von $y = (x - d)^2$ ist um d Längeneinheiten gegenüber der Normalparabel nach rechts (bei negativem d-Wert nach links) verschoben.
- 10) Scheitelform, $S(d|e)$
- 11) Man muss $y = x^2 + bx + c$ mit einer **quadratischen Ergänzung** in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ umwandeln. Daran kann man dann direkt die Koordinaten des Scheitelpunkts ablesen.
- 12) Man setzt die Koordinaten von $S(d|c)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ein.
- 13) Man setzt jeweils die Koordinaten beider Punkte in die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ ein und löst das resultierende Gleichungssystem nach b und c auf.

Sehr geehrte Lehrerinnen und Lehrer,

mit diesen Kopiervorlagen können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern effektiv und kräfteschonend das Thema „*Quadratische Funktionen*“ vermitteln. Alle Seiten sind so konzipiert, dass Ihnen aufwendige Erklärungen an der Tafel erspart bleiben.

Jedes Kapitel beginnt mit einem einführenden Beispiel, mit dessen Hilfe sich die Schüler/innen die jeweiligen Regeln und Kenntnisse selbstständig erarbeiten können. Wichtige mathematische Sätze und Zusammenfassungen sind in „*Merkekästen*“ hervorgehoben, die Ihre Schüler/innen direkt abschreiben können. Im Anschluss daran folgen jeweils Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen, die ebenfalls ins Schulheft übertragen werden können. Am Ende der Unterrichtseinheit finden Sie eine Checkliste, mit der die Schüler/innen den eigenen Kenntnisstand in kompakter Form überprüfen und wiederholen können.

Wie Sie nun die einzelnen Kapitel optimal im Unterricht einsetzen, zeigen Ihnen folgende Hinweise und Anmerkungen.

Kapitel 1: Die Funktion $y = x^2$

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen die Eigenschaften und das Schaubild der Funktion $y = x^2$ kennen.

Hinweise zur Durchführung:

Die Schüler/innen werden im einführenden Beispiel mit der quadratischen Funktion vertraut gemacht, indem sie den Flächeninhalt eines Quadrats in Abhängigkeit von dessen Seitenlänge berechnen sollen. In Beispiel 2 wird dann das Schaubild der Funktion $y = x^2$ vorgestellt, das die Schüler/innen anhand der entsprechenden Wertetabelle selbstständig erstellen sollten. Die Eigenschaften der Funktion $y = x^2$ und die Definition der Begriffe *Normalparabel* und *Scheitelpunkt* sind im *Merkekasten* auf Seite 2 zusammengefasst. In der Übung auf Seite 2 können die Schüler/innen üben, wie man bei quadratischen Funktionen fehlende Punktkoordinaten berechnet. Hier muss gegebenenfalls wiederholt werden, wie man rein-quadratische Gleichungen durch Wurzelziehen löst.

Zeitbedarf: ca. 1 Schulstunde; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 2: Die Funktion $y = ax^2$

Lernziele:

Die Schüler/innen erkennen, welchen Einfluss der Faktor a in $y = ax^2$ auf das Schaubild einer Parabel hat und wie das Schaubild von $y = ax^2$ aus der Normalparabel hervorgeht.

Hinweise zur Durchführung:

Mit Beispiel 1 auf Seite 4 können die Schüler/innen selbstständig erkunden, welchen Einfluss der Betrag des Faktors a in $y = ax^2$ auf das Aussehen der Parabel hat. Die Wertetabellen und die entsprechenden Schaubilder sollten von allen Schülerinnen und Schülern eigenständig erstellt und gezeichnet werden. Das zweite Beispiel (Seite 5) zeigt, was bei negativem Vorfaktor a mit dem Schaubild passiert. Beim Berechnen der Wertetabellen muss gegebenenfalls darauf hingewiesen werden, dass negative x -Werte beim Einsetzen in x^2 eingeklammert werden müssen. Dies wird erfahrungsgemäß von einigen Schülerinnen und Schülern immer wieder vergessen. Eine Zusammenfassung der Regeln, wie der Vorfaktor a in $y = ax^2$ das Aussehen einer Parabel beeinflusst, finden Sie im *Merkekasten* auf Seite 6. In der Übung auf Seite 6 kann dann das Erstellen von Wertetabellen und das Zeichnen der Schaubilder von Funktionen der Art $y = ax^2$ geübt werden.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 3: Die Funktion $y = ax^2 + c$

Lernziele:

Ausgehend von der Funktion $y = ax^2$ erkennen die Schüler/innen, wie der Summand „ $+c$ “ in $y = ax^2 + c$ das Aussehen des Schaubilds verändert. Darüber hinaus lernen sie, wie man die Scheitelkoordinaten der Funktion $y = ax^2 + c$ bestimmt und damit Funktionsterme den entsprechenden Parabeln richtig zuordnen kann.

Hinweise zur Durchführung:

Anhand der Wertetabellen für zwei Funktionen der Art $y = ax^2 + c$ sollen sich die Schüler/innen zunächst im einführenden Beispiel auf Seite 8 überlegen, wo jeweils der Scheitelpunkt liegt und wie die entsprechenden Schaubilder aus den Schaubildern von $y = ax^2$ hervorgehen. Mit den Kenntnissen aus Kapitel 2 sollten alle Schüler/innen diese Überlegung selbstständig durchführen können. Die Lösung zu Beispiel 1 und der *Merkekasten* auf Seite 9 fassen die Beziehung zwischen den Schaubildern von $y = ax^2 + c$ und $y = ax^2$ anschaulich zusammen. In den beiden Übungen auf Seite 9 sollen die Schüler/innen zum einen das Aussehen einer Parabel anhand des Funktionsterms beschreiben und zum anderen entscheiden und begründen, welche Funktionsterme zu vorgegebenen Parabeln gehören.

Zeitbedarf: ca. 2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 4: Die Funktion $y = (x - d)^2$

Lernziele:

Die Schüler/innen erkennen, dass das Schaubild von $y = (x - d)^2$ durch Rechts- bzw. Linksverschiebung der Normalparabel um d Längeneinheiten entsteht und warum dies so ist.

Hinweise zur Durchführung:

Im Beispiel auf Seite 11 sollen die Schüler/innen anhand von Wertetabellen die Schaubilder zweier Funktionen der Art $y = (x - d)^2$ erstellen und sich die Lage des Scheitelpunkts überlegen. Dabei hilft der Hinweis, dass der Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten Parabel die kleinste y-Koordinate aller Parabelpunkte hat. Spätestens beim Zeichnen der Schaubilder sollten alle Schüler/innen erkennen, wie das Schaubild von $y = (x - d)^2$ aus der Normalparabel hervorgeht. Die entsprechende Regel ist im *Merkekasten* auf Seite 11 zusammengefasst. Wie man die Lage des Scheitelpunkts der Funktion $y = (x - d)^2$ bestimmt und das entsprechende Schaubild mithilfe der Parabelschablone zeichnet, können die Schüler/innen in Übung 1 auf Seite 13 üben. In Übung 2 geht es dann umgekehrt darum, anhand der Scheitelkoordinaten die Funktionsgleichung aufzustellen.

Zeitbedarf: ca. 2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen aus dem Schulbuch auch mehr.

Kapitel 5: Die Funktion $y = (x - d)^2 + e$

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie und warum man anhand der Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ die Koordinaten des Scheitelpunkts ablesen kann. Außerdem können sie nach dieser Lerneinheit umgekehrt bei vorgegebenen Koordinaten des Scheitelpunkts die Funktionsgleichung aufstellen.

Hinweise zur Durchführung:

Im einführenden Beispiel auf Seite 14 lernen die Schüler/innen ausgehend von der Funktion $y = (x - 3)^2$ das Aussehen der Parabel von $y = (x - 3)^2 + 2$ kennen. Anhand der übersichtlichen Gegenüberstellung der Wertetabellen von $y = (x - 3)^2 + 2$ und $y = (x - 3)^2$ und den Schaubildern beider Funktionen können alle Schüler/innen selbstständig erkunden, wie das Schaubild von $y = (x - d)^2 + c$ aus dem Schaubild von $y = (x - d)^2$ bzw. aus der Normalparabel hervorgeht. Die entsprechende Regel ist im *Merkekasten* auf Seite 15 zusammengefasst. In Übung 1 können die Schüler/innen üben, wie man anhand der Scheitelform die Koordinaten des Scheitelpunkts abliest und damit die entsprechende Parabel zeichnet. In Übung 2 soll dann umgekehrt anhand der Koordinaten des Scheitelpunkts die Scheitelform aufgestellt werden.

Zeitbedarf: ca. 2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 6: Die Funktion $y = x^2 + bx + c$

Lernziele:

Die Schüler/innen lernen, wie man mit einer quadratischen Ergänzung die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ in die Scheitelform umwandeln und damit die Koordinaten des Scheitelpunkts bestimmen kann.

Hinweise zur Durchführung:

Im einführenden Beispiel auf Seite 17 sollen die Schüler/innen zunächst anhand einer Wertetabelle abschätzen, wo der Scheitelpunkt der Funktion $y = x^2 + 4x + 3$ liegen könnte. Insbesondere die etwas besseren Schüler/innen können schon an dieser Stelle die Rechenschritte erkunden, die für die Umwandlung in die Scheitelform benötigt werden. Der entsprechende Tipp dazu hilft sicher auf die Sprünge. Die Umformungsschritte der quadratischen Ergänzung für den allgemeinen Fall sind im *Merkekasten* auf Seite 18 zusammengefasst. Die quadratische Ergänzung und die Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunkts können dann in der Übung auf Seite 18 an vier Funktionstermen geübt werden.

Zeitbedarf: ca. 2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 7: Aufstellen der Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$

Lernziele:

Die Schüler/innen lernen, wie man zum einen anhand des Scheitelpunkts zum anderen anhand zweier bekannter Punkte die Funktionsgleichung aufstellt.

Hinweise zur Durchführung:

In Beispiel 1 werden die in Kapitel 5 gelernten Kenntnisse vorausgesetzt, die hier „rückwärts“ angewendet werden müssen, um mithilfe eines bekannten Scheitelpunkts die Funktionsgleichung aufzustellen. Benötigt wird außerdem die erste bzw. zweite binomische Formel, um die Quadratklammer $(x - d)^2$ aufzulösen. Eine kurze Wiederholung der binomischen Formeln wird hier für manche Schüler/innen vonnöten sein. Die besseren Schüler/innen sollten Beispiel 1 auch selbstständig bearbeiten können. Wie man die Parabelgleichung anhand zweier bekannter Punkte aufstellt, wird dann in Beispiel 2 gezeigt. Für eine selbstständige Bearbeitung ist dieses Beispiel eher ungeeignet. Insbesondere der erste Lösungsschritt (Aufstellen eines Gleichungssystems) sollte angegeben werden, bevor die Schüler/innen selbstständig weiter rechnen können. Die in Beispiel 1 und 2 gelernten Kenntnisse können schließlich in den Übungen auf Seite 22 geübt werden.

Zeitbedarf: ca. 2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Checkliste - was man nun wissen sollte

Anhand der Fragen der Checkliste auf Seite 23 können Sie die wichtigsten Kenntnisse zum Thema „Quadratische Funktionen“ in kompakter Form abfragen und wiederholen. Auf diese Weise erhalten Ihre Schüler/innen einen guten Überblick über den eigenen Kenntnisstand. Die Antworten auf die Fragen finden Sie als Kopiervorlage in doppelter Ausführung, sodass Sie nur jeweils 1 Blatt für zwei Schüler/innen kopieren müssen.

Zeitbedarf: ca. 30 min.