Bruchrechnung:

Inhalt:

Die vorliegenden Folienvorlagen enthalten folgende Elemente:

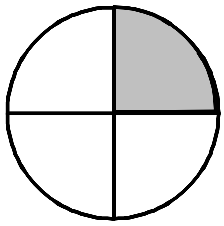
 **Beispiel:**	Anhand von Beispielen werden neue Regeln, Definitionen und Kenntnisse eingeführt. Die Aufgaben in den Beispielen sind meist so gestellt, dass sie von den Schülerinnen und Schülern auch selbstständig bearbeitet werden können.
Merke: 	Die *„Merkekästen“* stehen meist im Anschluss an ein einführendes Beispiel und fassen wichtige Regeln, Definitionen und Kenntnisse zusammen. Sie sollten von den Schülerinnen und Schülern unbedingt abgeschrieben werden.
 **Übung:**	Hier können die Schülerinnen und Schüler die gelernten Regeln und Kenntnisse üben und festigen. Im Anschluss an die Übungsaufgaben finden Sie jeweils die ausführlichen Lösungen dazu.

1. Brüche und Bruchteile

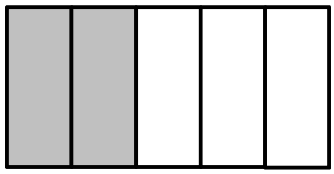
Beispiel:

Wie groß ist der Bruchteil (= Anteil) der markierten Felder an der gesamten Fläche?

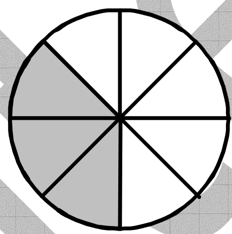
Figur A:



Figur B:



Figur C:



Lösung:

Figur A:

Der Bruchteil der markierten Fläche an der gesamten Fläche ist ein Viertel. Man benutzt dafür die **Bruchschreibweise:** $\frac{1}{4}$

Figur B:

Ein Teil des Streifens ist ein Fünftel. Da von insgesamt 5 Teilen 2 Teile markiert sind, ist der Bruchteil der markierten Fläche an der gesamten Fläche $\frac{2}{5}$ (sprich: "zwei Fünftel").

Figur C:

Hier sind von insgesamt 8 Teilen des Kreises 3 Teile markiert. Der Bruchteil der markierten Fläche ist also $\frac{3}{8}$ (sprich: „drei Achtel“).

Merke:

Ein **Bruch** beschreibt einen **Bruchteil** von einer Größe. Jeder Bruch besteht aus einem **Zähler**, einem **Nenner** und dem Bruchstrich dazwischen.

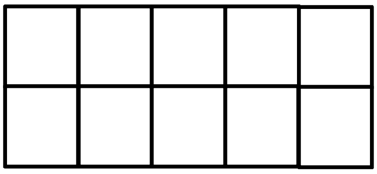
$$\frac{2}{5} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{Zähler} \\ \leftarrow \text{Nenner} \end{matrix}$$

Der Nenner eines Bruchs gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze geteilt werden soll. Der Zähler gibt an, wie viele dieser Teile gemeint sind.

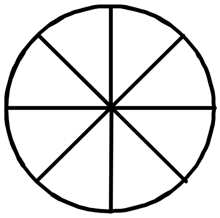
Übung 1:

Übertrage die Figuren ins Heft und markiere den angegebenen Bruchteil.

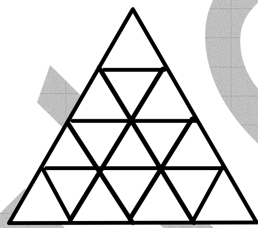
Figur A: $\frac{7}{10}$



Figur B: $\frac{5}{8}$

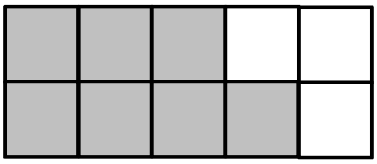


Figur C: $\frac{11}{16}$

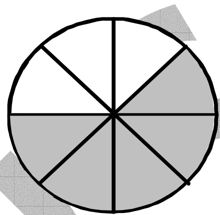


Lösung:

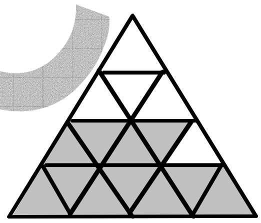
Figur A: $\frac{7}{10}$



Figur B: $\frac{5}{8}$



Figur C: $\frac{11}{16}$



Übung 2:

Berechne.

a) $\frac{3}{8}$ von 200 m b) $\frac{2}{5}$ von 15 kg Mehl c) $\frac{3}{4}$ von 80 Litern d) $\frac{5}{6}$ von 90 Minuten

Lösung:

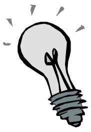
a) $\frac{3}{8}$ von 200 m sind (200 m : 8) · 3 = 25 m · 3 = **75 m**

b) $\frac{2}{5}$ von 15 kg Mehl sind (15 kg : 5) · 2 = 3 kg · 2 = **6 kg**

c) $\frac{3}{4}$ von 80 Litern sind (80 l : 4) · 3 = 20 l · 3 = **60 l**

d) $\frac{5}{6}$ von 90 min sind (90 min : 6) · 5 = 15 min · 5 = **75 min**

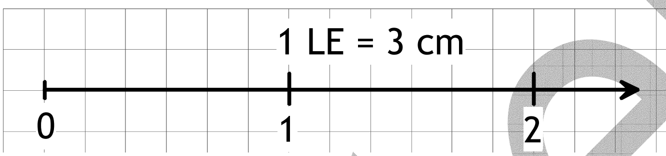
Exkurs: Brüche als Quotient



Beispiel:

a)

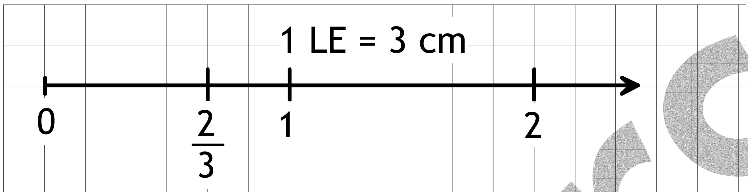
Trage den Bruch $\frac{2}{3}$ in einen Zahlenstrahl mit der Längeneinheit 1 LE = 3 cm ein.



b) Ermittle die Lage des Quotienten 2 : 3 auf demselben Zahlenstrahl, indem du den dritten Teil von 2 LE bestimmst. Was fällt auf, wenn du mit der Lage von $\frac{2}{3}$ vergleichst ?

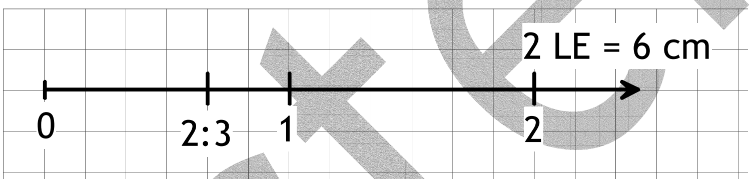
Lösung:

a)



Der Bruch $\frac{2}{3}$ liegt 2 cm rechts vom Ursprung, da $\frac{2}{3}$ von 3 cm = 2 cm sind.

b)



Der Quotient 2 : 3 ist der dritte Teil von 2 LE (= 6 cm). Das sind 2 cm.

Der Quotient 2: 3 liegt also an derselben Stelle wie der Bruch $\frac{2}{3}$.

Das heißt, der Quotient 2:3 und der Bruch $\frac{2}{3}$ sind gleichwertig.

Merke:

Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ ist gleichwertig mit dem Quotienten a : b

und umgekehrt jeder Quotient a : b mit dem Bruch $\frac{a}{b}$.

Es gilt: $\frac{a}{b} = a : b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$

2. Erweitern und Kürzen von Brüchen

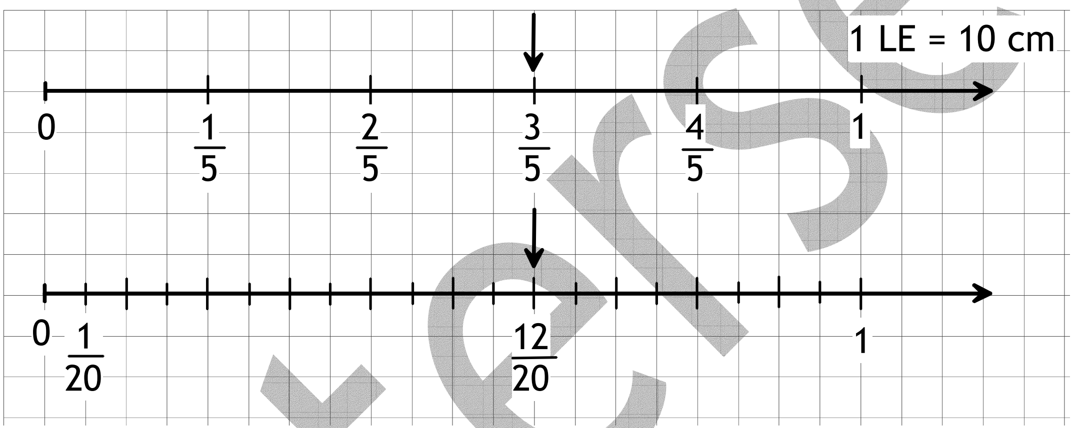
Beispiel:

Zeichne zwei Zahlenstrahlen genau übereinander und wähle die Längeneinheit 1 LE = 10 cm (= 20 Kästchen). Trage den Bruch $\frac{3}{5}$ in den oberen und den Bruch $\frac{12}{20}$ in den unteren Zahlenstrahl ein. Was fällt auf ?

Tipp: Die Lage der beiden Brüche auf dem Zahlenstrahl findest du, indem du berechnest, wie viele Kästchen $\frac{3}{5}$ bzw. $\frac{12}{20}$ von 20 Kästchen sind.

Lösung:

$\frac{3}{5}$ von 10 cm sind 6 cm. $\frac{12}{20}$ von 20 Kästchen sind 12 Kästchen = 6 cm.



Beide Brüche liegen auf dem Zahlenstrahl an derselben Stelle - das heißt, sie sind gleichwertig.

Außerdem fällt auf, dass der Zähler und der Nenner im Bruch $\frac{12}{20}$ jeweils das 4-fache des Zählers und Nenners des Bruchs $\frac{3}{5}$ sind.

$$\frac{3 \xrightarrow{\cdot 4} 12}{5 \xrightarrow[\cdot 4]{} 20} \qquad \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$

Merke: **Gleichwertige Brüche** liegen auf dem Zahlenstrahl an derselben Stelle. Gleichwertige Brüche können ineinander umgewandelt werden, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert bzw. dividiert.

Die Multiplikation des Zählers und Nenners mit derselben Zahl nennt man **Erweitern eines Bruchs**.

Die Division des Zählers und Nenners durch dieselbe Zahl nennt man **Kürzen eines Bruchs**.

Übung 1:

Erweitere folgende Brüche mit der angegebenen Zahl.

a) $\frac{2}{7}$ mit 2 b) $\frac{5}{11}$ mit 4 c) $\frac{3}{4}$ mit 7 d) $\frac{7}{12}$ mit 6

Lösung:

a) $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot\mathbf{2}}{7\cdot\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{14}}$ b) $\frac{5}{11}=\frac{5\cdot\mathbf{4}}{11\cdot\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{44}}$ c) $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot\mathbf{7}}{4\cdot\mathbf{7}}=\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{28}}$ d) $\frac{7}{12}=\frac{7\cdot\mathbf{6}}{12\cdot\mathbf{6}}=\frac{\mathbf{42}}{\mathbf{72}}$

Übung 2:

Kürze folgende Brüche mit der angegebenen Zahl.

a) $\frac{8}{12}$ mit 4 b) $\frac{15}{25}$ mit 5 c) $\frac{18}{24}$ mit 6 d) $\frac{14}{35}$ mit 7

Lösung:

a) $\frac{8}{12}=\frac{8:\mathbf{4}}{12:\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ b) $\frac{15}{25}=\frac{15:\mathbf{5}}{25:\mathbf{5}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$ c) $\frac{18}{24}=\frac{18:\mathbf{6}}{24:\mathbf{6}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ d) $\frac{14}{35}=\frac{14:\mathbf{7}}{35:\mathbf{7}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$

Übung 3:

Kürze folgende Brüche soweit wie möglich.

a) $\frac{18}{27}$ b) $\frac{15}{21}$ c) $\frac{32}{40}$ d) $\frac{36}{54}$

Lösung:

a) $\frac{18}{27}=\frac{18:\mathbf{9}}{27:\mathbf{9}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ b) $\frac{15}{21}=\frac{15:\mathbf{3}}{21:\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$ c) $\frac{32}{40}=\frac{32:\mathbf{8}}{40:\mathbf{8}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$ d) $\frac{36}{54}=\frac{36:\mathbf{18}}{54:\mathbf{18}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

3. Größenvergleich von Brüchen - der Hauptnenner

Beispiel 1:

a) Ordne folgende Brüche der Größe nach. Beginne mit dem kleinsten Bruch.
Benutze jeweils einen Zahlenstrahl mit der angegebenen Längeneinheit (LE).

Reihe A: $\frac{7}{18}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{9}{18}$; $\frac{17}{18}$; $\frac{4}{18}$ (Zahlenstrahl: 1 LE = 9 cm)

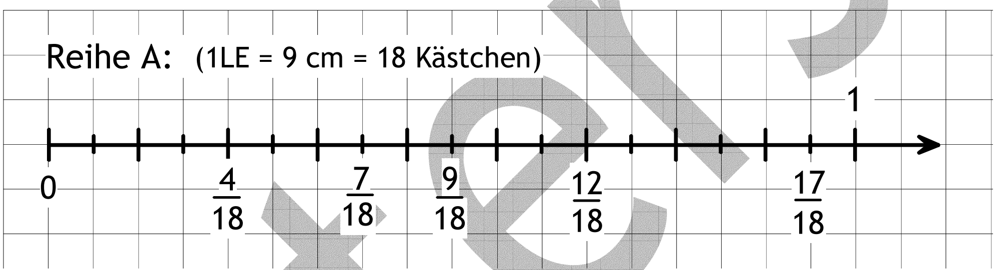
Reihe B: $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2}$ (Zahlenstrahl: 1 LE = 6 cm)

(Tipp: Ermittle die Lage der Brüche auf dem Zahlenstrahl so wie im Beispiel von Kapitel 2.)

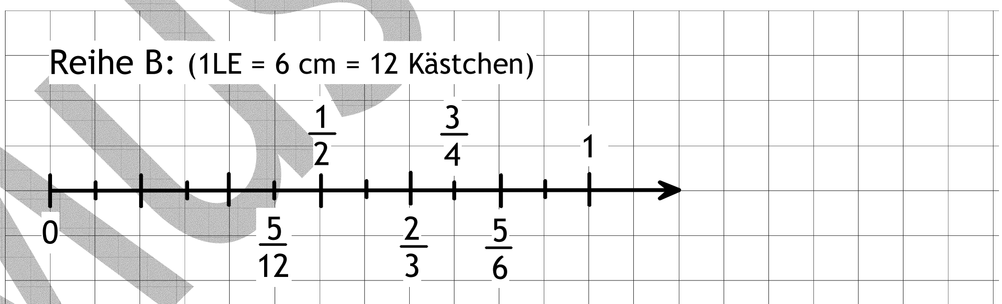
b) Welche Reihe lässt sich leichter der Größe nach ordnen ? Warum ?

Lösung:

a)



Es gilt: $\frac{4}{18} < \frac{7}{18} < \frac{9}{18} < \frac{12}{18} < \frac{17}{18}$



Es gilt: $\frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

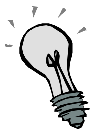
b)

Die Reihe A lässt sich leichter der Größe nach ordnen, da alle Nenner gleich sind und man nur auf die Zähler achten muss.

Merke:

Brüche, deren Nenner gleich sind, heißen **gleichnamige Brüche**. Von zwei gleichnamigen Brüchen ist derjenige Bruch größer, dessen Zähler größer ist.
Um zwei **ungleichnamige Brüche** miteinander vergleichen zu können, muss man sie durch geschicktes Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner, den sogenannten **Hauptnenner**, bringen. Um unnötig große Zahlen zu vermeiden, sollte man als Hauptnenner immer das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner nehmen.

Bestimmen des Hauptnenners



Beispiel 2: Was ist der Hauptnenner der Brüche $\frac{1}{18}$ und $\frac{1}{24}$?

Lösung:

Variante A:

Zunächst schreibt man die **Reihen beider Nenner** auf:

18er-Reihe: 18, 36, 54, **72**, 90, 108, 126, 144, 162, 180

24er-Reihe: 24, 48, **72**, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240

Die kleinste Zahl, die gleichzeitig in beiden Reihen vorkommt, ist der Hauptnenner.

Variante B:

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier Zahlen a und b kann man auch mit dem **größten gemeinsamen Teiler (ggT)** der beiden Zahlen berechnen.

Es gilt: $\text{kgV} = a \cdot \frac{b}{\text{ggT}}$ bzw. $\text{kgV} = b \cdot \frac{a}{\text{ggT}}$

Bei den Nennern 18 und 24 ist der ggT = 6.

Damit erhält man: $\text{kgV} = 18 \cdot \frac{24}{6} = 18 \cdot 4 = \mathbf{72}$ oder $\text{kgV} = 24 \cdot \frac{18}{6} = 24 \cdot 3 = \mathbf{72}$

Tipps:

1. Den größten gemeinsamen Teiler (ggT) kann man folgendermaßen leicht bestimmen: Man bildet zunächst aus den beiden Zahlen (hier 18 und 24) einen Bruch, den man dann (eventuell auch schrittweise) vollständig kürzt.

Kürzen von $\frac{18}{24}$ ergibt: $\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Die Zahl, mit der vollständig gekürzt wurde, ist der ggT; hier also 6.

2. Mit der Gleichung $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ kann man das kgV von 18 und 24 auch sofort berechnen: kgV = 4·18 = 24·3 = 72

Variante C:

Man zerlegt die **Nenner in Primfaktoren** und schreibt gleiche Faktoren untereinander. Unterschiedliche Faktoren dürfen nicht untereinander stehen. Bei den Nennern 18 und 24 sieht das so aus:

$$\begin{array}{lcccc} 18 = 2 & & \cdot & 3 \cdot 3 \\ 24 = 2 \cdot 2 & \cdot & 2 & \cdot 3 \end{array}$$

Die Primfaktoren des Hauptnenners erhält man, wenn man die Primfaktoren in diesem Schema „spaltenweise” sammelt. Stehen zwei Faktoren übereinander, wird daraus nur ein Faktor:

$$\begin{array}{lcccc} 18 = 2 & & \cdot & 3 \cdot 3 \\ 24 = 2 \cdot 2 & \cdot & 2 & \cdot 3 \\ \hline \end{array}$$

$$HN = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{72}$$

Übung:

Ordne der Größe nach, indem du auf den Hauptnenner (HN) erweiterst.
Beginne mit dem kleinsten Bruch.

a) $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{15}$

b) $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{5}$

c) $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{18}$

d) $\frac{7}{18}$, $\frac{8}{15}$ und $\frac{3}{6}$

e) $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{18}$ und $\frac{4}{12}$

f) $\frac{9}{14}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{13}{21}$

Lösung:

a) HN = 15. Erweitern: $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ und $\frac{7}{15} = \frac{7}{15}$. Damit ist $\frac{7}{15} < \frac{3}{5}$.

b) HN = 35. Erweitern: $\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$ und $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$. Damit ist $\frac{5}{7} < \frac{4}{5}$.

c) HN = 36. Erweitern: $\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$ und $\frac{11}{18} = \frac{22}{36}$. Damit ist $\frac{7}{12} < \frac{11}{18}$.

d) HN = 90. Erweitern: $\frac{7}{18} = \frac{35}{90}$, $\frac{8}{15} = \frac{48}{90}$ und $\frac{3}{6} = \frac{45}{90}$. Damit ist $\frac{7}{18} < \frac{3}{6} < \frac{8}{15}$.

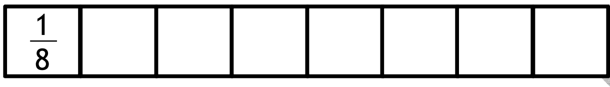
e) HN = 72. Erweitern: $\frac{5}{24} = \frac{15}{72}$, $\frac{7}{18} = \frac{28}{72}$ und $\frac{4}{12} = \frac{24}{72}$. Damit ist $\frac{5}{24} < \frac{4}{12} < \frac{7}{18}$.

f) HN = 42. Erweitern: $\frac{9}{14} = \frac{27}{42}$, $\frac{5}{7} = \frac{30}{42}$ und $\frac{13}{21} = \frac{26}{42}$. Damit ist $\frac{13}{21} < \frac{9}{14} < \frac{5}{7}$.

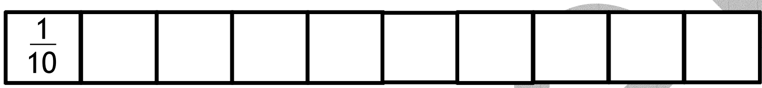
4. Addition und Subtraktion von Brüchen

Beispiel 1: (Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche)

a) Berechne $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}$ mithilfe eines Streifens, der aus 8 gleichen Teilen besteht:



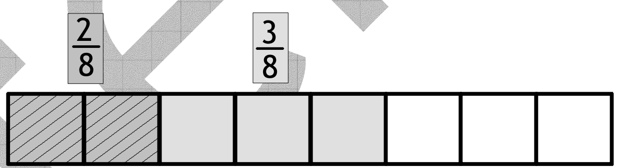
b) Berechne $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}$ mithilfe eines Streifens, der aus 10 gleichen Teilen besteht:



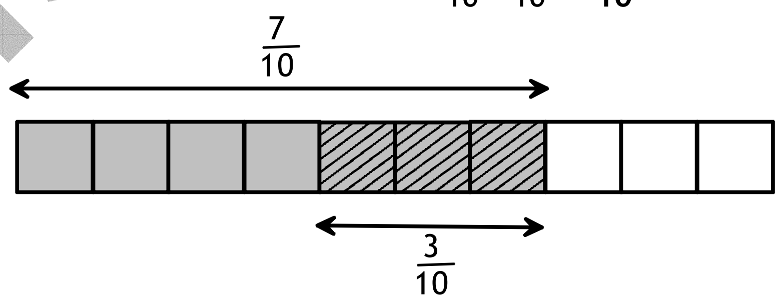
c) Formuliere eine Regel zur Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche.

Lösung:

a) Wenn man erst 2 Achtel des Streifens markiert und anschließend weitere 3 Achtel, sind insgesamt 2 + 3 = 5 Achtel des Streifens markiert. Damit gilt: $\frac{2}{8}+\frac{3}{8} = \mathbf{\frac{5}{8}}$



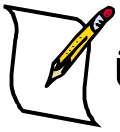
b) Das Ergebnis erhält man, indem man erst 7 der 10 Teile markiert und dann davon wieder 3 Teile abzieht. 4 Teile bleiben übrig. Es gilt also: $\frac{7}{10}-\frac{3}{10} = \mathbf{\frac{4}{10}}$



c) Bei der Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen addiert bzw. subtrahiert man die Zähler und behält den Nenner bei.

Merke: **Gleichnamige Brüche** werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den gleichen Nenner beibehält.

Es gilt: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ bzw. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$



Übung 1:

Berechne. Kürze das Ergebnis, falls möglich.

a) $\frac{1}{9} + \frac{7}{9}$ b) $\frac{3}{17} + \frac{8}{17}$ c) $\frac{8}{21} - \frac{5}{21}$ d) $\frac{13}{15} - \frac{8}{15}$

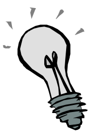
Lösung:

a) $\frac{1}{9} + \frac{7}{9} = \frac{1+7}{9} = \mathbf{\frac{8}{9}}$

b) $\frac{3}{17} + \frac{8}{17} = \frac{3+8}{17} = \mathbf{\frac{11}{17}}$

c) $\frac{8}{21} - \frac{5}{21} = \frac{8-5}{21} = \frac{3}{21} = \mathbf{\frac{1}{7}}$

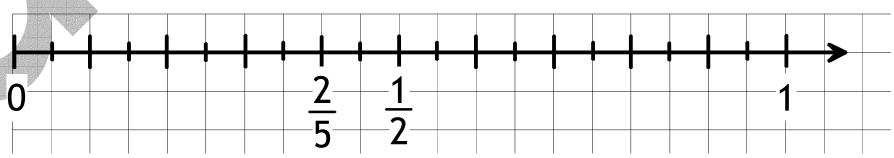
d) $\frac{13}{15} - \frac{8}{15} = \frac{13-8}{15} = \frac{5}{15} = \mathbf{\frac{1}{3}}$



Beispiel 2: (Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche)

Berechne: a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$

Veranschauliche die Rechnungen mithilfe von Pfeilen an folgendem Zahlenstrahl (1 LE = 10 cm):

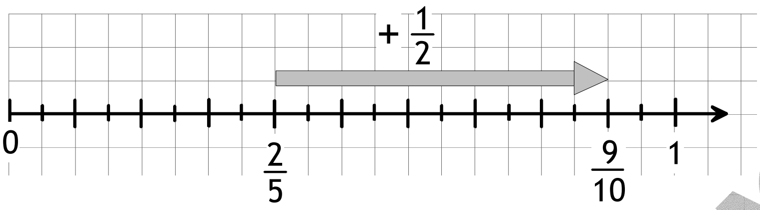


c) Wie könnte man die Ergebnisse ohne einen Zahlenstrahl berechnen ?

Lösung:

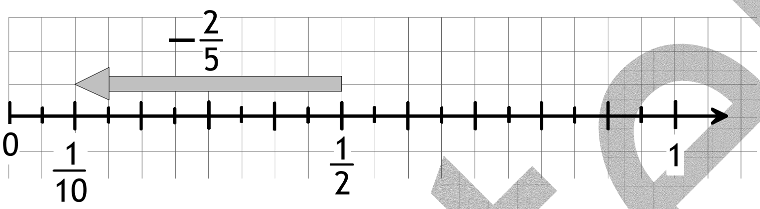
a) Die Addition ergibt:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$$



b) Die Subtraktion ergibt:

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$



c) Ohne Hilfe des Zahlenstrahls berechnet man das Ergebnis, indem man zuerst beide Brüche auf den Hauptnenner 10 erweitert.

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=\mathbf{\frac{9}{10}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{5}{10}-\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

Merke:

Ungleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner bringt und anschließend die gleichnamigen Brüche addiert bzw. subtrahiert.

Um große Zahlen zu vermeiden sollte man als Hauptnenner das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner nehmen.

Übung 2:

Erweitere auf den Hauptnenner und berechne dann.

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{5}-\frac{7}{15}$ c) $\frac{3}{14}+\frac{2}{7}$

d) $\frac{5}{6}-\frac{4}{9}$ e) $\frac{7}{10}+\frac{4}{15}$ f) $\frac{11}{18}-\frac{5}{24}$

Lösung:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{5}{6}}$

b) $\frac{4}{5}-\frac{7}{15}=\frac{12}{15}-\frac{7}{15}=\frac{5}{15}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

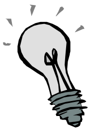
c) $\frac{3}{14}+\frac{2}{7}=\frac{3}{14}+\frac{4}{14}=\frac{7}{14}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

d) $\frac{5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{15}{18}-\frac{8}{18}=\mathbf{\frac{7}{18}}$

e) $\frac{7}{10}+\frac{4}{15}=\frac{21}{30}+\frac{8}{30}=\mathbf{\frac{29}{30}}$

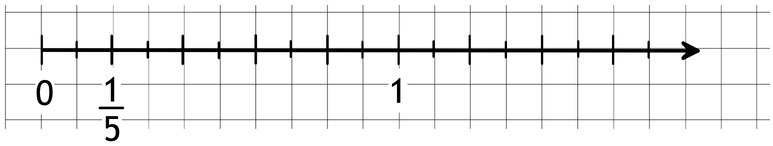
f) $\frac{11}{18}-\frac{5}{24}=\frac{44}{72}-\frac{15}{72}=\mathbf{\frac{29}{72}}$

5. Unechte Brüche und gemischte Zahlen



Beispiel 1:

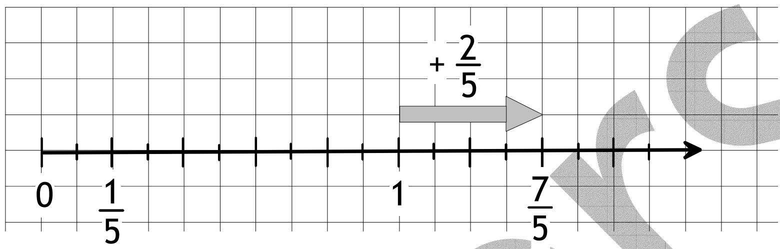
a) Zeichne einen Zahlenstrahl (1 LE = 5 cm) und trage den unechten Bruch $\frac{7}{5}$ ein.



b) Beschreibe den Bruch $\frac{7}{5}$ als Summe zwischen 1 und einem echten Bruch.

Lösung:

a) Wegen $1 = \frac{5}{5}$ muss man von 1 aus um $\frac{2}{5}$ nach rechts gehen.



b) Es ist: $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$

Merke:

Brüche, in denen der Zähler größer als der Nenner ist, nennt man **unechte Brüche**. Man kann sie als Summe zwischen einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch schreiben. Zum Beispiel:

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$$

Gewöhnlich lässt man das Pluszeichen weg und schreibt:

$$\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

Zahlen, die aus einer ganzen Zahl und einem Bruch bestehen, nennt man **gemischte Zahlen**.

Ist der Zähler ein Vielfaches des Nenners, steht der unechte Bruch für eine ganze Zahl. Z. B.: $\frac{12}{4} = \frac{3}{1} = 3$

Beispiel 2:

a) Wandle die gemischte Zahl $3\frac{4}{5}$ in einen unechten Bruch um.
Überlege dir eine möglichst einfache Rechenvorschrift.

b) Wandle den unechten Bruch $\frac{18}{7}$ in eine gemischte Zahl um.

Lösung:

a) Es ist: $3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{19}{5}}$

Einfacher kann man so rechnen: $3\frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 4}{5} = \mathbf{\frac{19}{5}}$

b) Wegen $\frac{18}{7} = 18 : 7 = 2$ Rest 4 erhält man: $\frac{18}{7} = \mathbf{2\frac{4}{7}}$

Merke:

Gemischte Zahlen können nach folgender Regel **in unechte Brüche** umgewandelt werden:

$$a\frac{b}{c} = \frac{c \cdot a + b}{c} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{N}$$

Umgekehrt wandelt man einen **unechten Bruch in eine gemischte Zahl** um, indem man sich überlegt, wie oft der Nenner in den Zähler passt. Der Rest ist dann der Zähler des Bruchs in der gemischten Zahl.

Zum Beispiel: $\frac{13}{5} = 13 : 5 = 2$ Rest 3. Also ist $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.

Übung 1:

Wandle in einen unechten Bruch um:

a) $1\frac{1}{2}$ b) $7\frac{3}{4}$ c) $5\frac{2}{3}$ d) $12\frac{4}{7}$ e) $9\frac{5}{8}$ f) $11\frac{9}{11}$

Lösung:

a) $1\frac{1}{2} = \frac{2\cdot 1+1}{2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

b) $7\frac{3}{4} = \frac{4\cdot 7+3}{4} = \mathbf{\frac{31}{4}}$

c) $5\frac{2}{3} = \frac{3\cdot 5+2}{3} = \mathbf{\frac{17}{3}}$

d) $12\frac{4}{7} = \frac{7\cdot 12+4}{7} = \mathbf{\frac{88}{7}}$

e) $9\frac{5}{8} = \frac{8\cdot 9+5}{8} = \mathbf{\frac{77}{8}}$

f) $11\frac{9}{11} = \frac{11\cdot 11+9}{11} = \mathbf{\frac{130}{11}}$

Übung 2:

Schreibe als gemischte Zahl:

a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{33}{4}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{47}{7}$ e) $\frac{53}{9}$ f) $\frac{72}{8}$

Lösung:

a) 6 : 5 = 1 Rest 1. Damit ist: $\frac{6}{5} = \mathbf{1\frac{1}{5}}$

b) 33 : 4 = 8 Rest 1. Damit ist: $\frac{33}{4} = \mathbf{8\frac{1}{4}}$

c) 20 : 3 = 6 Rest 2. Damit ist: $\frac{20}{3} = \mathbf{6\frac{2}{3}}$

d) 47 : 7 = 6 Rest 5. Damit ist: $\frac{47}{7} = \mathbf{6\frac{5}{7}}$

e) 53 : 9 = 5 Rest 8. Damit ist: $\frac{53}{9} = \mathbf{5\frac{8}{9}}$

f) 72 : 8 = 9 Rest 0. Damit ist: $\frac{72}{8} = \mathbf{9}$

6. Multiplikation von Brüchen

Beispiel 1:

a) Berechne mithilfe einer Summe das Produkt $6 \cdot \frac{2}{3}$.

(Tipp: Das Produkt $3 \cdot 4$ kann man auch so berechnen: $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$)

b) Überlege dir eine Regel, wie man das Ergebnis einfacher berechnen könnte als in a).

c) Berechne mithilfe des Kommutativgesetzes der Multiplikation das Produkt $\frac{3}{5} \cdot 15$.

d) Berechne den Bruchteil $\frac{3}{5}$ von 15 (vgl. Kap. 1).

Was fällt auf, wenn du mit dem Ergebnis aus c) vergleichst ?

Lösung:

a) $6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2+2+2+2+2}{3} = \mathbf{\frac{12}{3}} = \mathbf{4}$

b) Wenn man 6 mit dem Zähler von $\frac{2}{3}$ multipliziert und das Ergebnis durch 3 teilt, erhält man das gleiche Ergebnis: $6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 2}{3} = \mathbf{\frac{12}{3}} = \mathbf{4}$

c) Es ist: $\frac{3}{5} \cdot 15 = 15 \cdot \frac{3}{5} = \frac{15 \cdot 3}{5} = \mathbf{\frac{45}{5}} = \mathbf{9}$

d) $\frac{3}{5}$ von 15 sind $(15 : 5) \cdot 3 = 9$. Der Bruchteil $\frac{3}{5}$ von 15 ist also dasselbe wie $\frac{3}{5} \cdot 15$.

Allgemein gilt: $\frac{a}{b}$ von $c = (c : b) \cdot a = \frac{c}{b} \cdot a = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{c \cdot a}{b} = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot c$

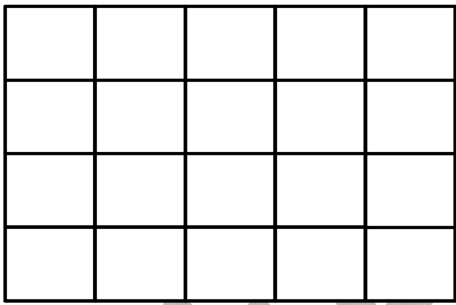
Merke: Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man seinen Zähler mit der natürlichen Zahl multipliziert und den Nenner beibehält.

Es gilt: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ bzw. $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$

Der Bruchteil „$\frac{a}{b}$ von c" kann mit dem Produkt $\frac{a}{b} \cdot c$ berechnet werden.

Beispiel 2:

a) Bestimme den Bruchteil „$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$“ mithilfe der nebenstehenden Figur, indem du zuerst $\frac{2}{5}$ von allen 20 Kästchen markierst. Berechne anschließend $\frac{3}{4}$ von den markierten Kästchen.



b) Wie könnte man den Bruchteil „$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$“ berechnen, ohne die Kästchen zu zählen ?

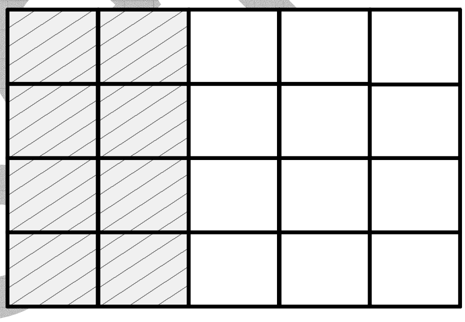
Lösung:

a)

Die gesamte Fläche besteht aus 20 Kästchen.

$\frac{2}{5}$ davon sind $\frac{2}{5} \cdot 20$ Kästchen = 8 Kästchen.

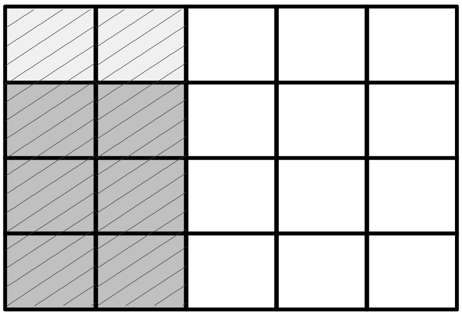
$\frac{2}{5} =$



$\frac{3}{4}$ von 8 Kästchen sind: $\frac{3}{4} \cdot 8$ Kästchen = 6 Kästchen

Das entspricht dem Bruchteil $\frac{6}{20}$ von 20 Kästchen.

Es gilt also: $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5} = \mathbf{\frac{6}{20}}$



$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5} = \frac{6}{20}$

b)

Der Bruchteil $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$ kann als Produkt geschrieben werden (vgl. Beispiel 1):

$$\frac{3}{4} \text{ von } \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$$

Wenn man nun Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert, erhält man dasselbe Ergebnis:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20}$$

Merke: Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

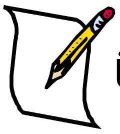
Es gilt: $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$ mit a, b, c, d $\in \mathbb{N}$

Tipp: „überkreuz“ kürzen

Oft kann man vor der Multiplikation von zwei Brüchen „überkreuz“ kürzen. Dadurch erleichtert man sich die Berechnung des Produkts.

Zum Beispiel:

$$\frac{4}{15}\cdot\frac{25}{32}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{15}}}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{8}{\cancel{32}}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{24}$$



Übung:

Berechne. Kürze zuerst überkreuz, falls möglich.

a) $2\cdot\frac{8}{13}$ b) $\frac{3}{7}\cdot 9$ c) $\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{11}$

d) $\frac{6}{13}\cdot\frac{4}{5}$ e) $\frac{14}{25}\cdot\frac{15}{49}$ f) $\frac{27}{35}\cdot\frac{7}{18}$

Lösung:

a) $2\cdot\frac{8}{13}=\frac{2}{1}\cdot\frac{8}{13}=\mathbf{\frac{16}{13}}$

b) $\frac{3}{7}\cdot 9=\frac{27}{7}=\mathbf{3\frac{6}{7}}$

c) $\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{11}=\mathbf{\frac{35}{99}}$

d) $\frac{6}{13}\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{24}{65}}$

e) $\frac{14}{25}\cdot\frac{15}{49}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\mathbf{\frac{6}{35}}$

f) $\frac{27}{35}\cdot\frac{7}{18}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{10}}$

7. Division von Brüchen

Beispiel 1:

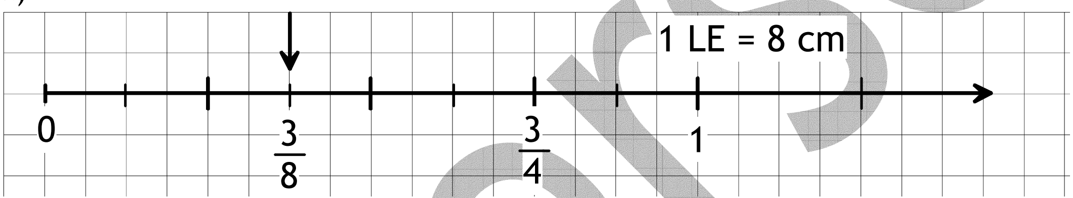
a) Trage den Bruch $\frac{3}{4}$ in einen Zahlenstrahl ein (1 LE = 8 cm). Berechne dann mithilfe des Zahlenstrahls den Quotienten $\frac{3}{4} : 2$.

b) Trage den Bruch $\frac{3}{5}$ in einen Zahlenstrahl ein (1 LE = 10 cm). Berechne dann mithilfe des Zahlenstrahls den Quotienten $\frac{3}{5} : 4$.

c) Wie könnte man die Quotienten aus a) und b) berechnen, ohne einen Zahlenstrahl zu benutzen ?

Lösung:

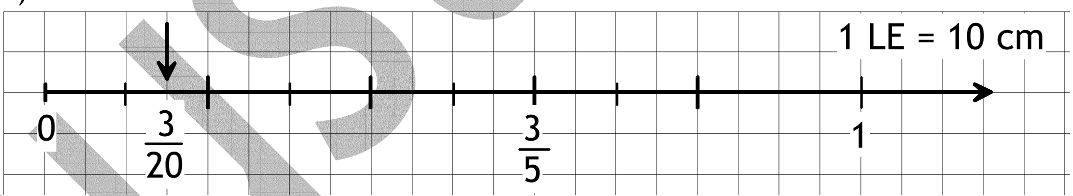
a)



Der Bruch $\frac{3}{4}$ liegt bei 6 cm (= $\frac{3}{4}$ von 8 cm). Der Quotient $\frac{3}{4} : 2$ muss also bei 3 cm liegen.

3 cm von 8 cm entspricht dem Bruch $\frac{3}{8}$. Es gilt also: $\frac{3}{4} : 2 = \mathbf{\frac{3}{8}}$

b)



Der Bruch $\frac{3}{5}$ liegt bei 6 cm (= $\frac{3}{5}$ von 10 cm) bzw. bei 12 Kästchen.

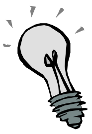
Der Quotient $\frac{3}{5} : 4$ muss also bei 3 Kästchen liegen.

3 Kästchen von 20 Kästchen entspricht dem Bruch $\frac{3}{20}$. Es gilt also: $\frac{3}{5} : 4 = \mathbf{\frac{3}{20}}$

c) Man erhält die gleichen Ergebnisse, wenn man jeweils den Nenner mit dem Teiler multipliziert: $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} = \mathbf{\frac{3}{8}}$ und $\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5 \cdot 4} = \mathbf{\frac{3}{20}}$

Merke: Man dividiert einen Bruch **durch eine natürliche Zahl**, indem man den Nenner mit dieser Zahl multipliziert.

Es gilt: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$



Beispiel 2: Es ist: $4 : \frac{3}{5} = \frac{4}{\frac{3}{5}} = \frac{4 \cdot \mathbf{5}}{\frac{3}{5} \cdot \mathbf{5}} = \mathbf{\frac{20}{3}}$

a) Berechne entsprechend $5 : \frac{4}{7}$ und $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, indem du jeweils den Quotient zuerst als Doppelbruch schreibst und dann geschickt erweiterst.

b) Wie könnte man die Quotienten einfacher berechnen ?

Lösung:

a) $5 : \frac{4}{7} = \frac{5}{\frac{4}{7}} = \frac{5 \cdot \mathbf{7}}{\frac{4}{7} \cdot \mathbf{7}} = \mathbf{\frac{35}{4}}$ und $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \mathbf{20}}{\frac{2}{5} \cdot \mathbf{20}} = \mathbf{\frac{15}{8}}$

b) Wenn man jeweils mit dem Kehrbruch des Teilers multipliziert, erhält man die gleichen Ergebnisse:

$4 : \frac{3}{5} = 4 \cdot \frac{5}{3} = \mathbf{\frac{20}{3}}$ und $5 : \frac{4}{7} = 5 \cdot \frac{7}{4} = \mathbf{\frac{35}{4}}$ und $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \mathbf{\frac{15}{8}}$

Merke: Man dividiert **durch einen Bruch**, indem man mit seinem **Kehrbruch** multipliziert. Den Kehrbruch eines Bruchs erhält man, indem man Zähler und Nenner vertauscht.

Es gilt: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$

Übung 1: Berechne und kürze soweit wie möglich.

a) $5 : \frac{2}{7}$ b) $8 : \frac{2}{9}$ c) $\frac{6}{13} : 6$

d) $\frac{8}{9} : 4$ e) $\frac{3}{4} : \frac{6}{11}$ f) $\frac{5}{6} : \frac{6}{5}$

Lösung:

a) $5 : \frac{2}{7} = 5 \cdot \frac{7}{2} = \mathbf{\frac{35}{2}}$

b) $8 : \frac{2}{9} = 8 \cdot \frac{9}{2} = \frac{72}{2} = \mathbf{36}$

c) $\frac{6}{13} : 6 = \frac{6}{13 \cdot 6} = \mathbf{\frac{1}{13}}$

d) $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \cdot 4} = \mathbf{\frac{2}{9}}$

e) $\frac{3}{4} : \frac{6}{11} = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{2} = \mathbf{\frac{11}{8}}$

f) $\frac{5}{6} : \frac{6}{5} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \mathbf{1}$

Übung 2: Vereinfache, indem du zunächst als Quotient schreibst.

a) $\dfrac{6}{\frac{3}{4}}$ b) $\dfrac{\frac{7}{9}}{14}$ c) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}$ d) $\dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{16}{25}}$

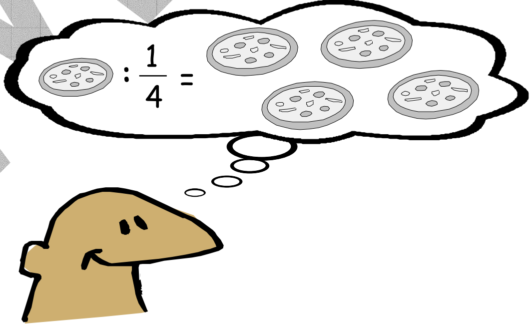
Lösung:

a) $\dfrac{6}{\frac{3}{4}} = 6 : \frac{3}{4} = 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = \mathbf{8}$

b) $\dfrac{\frac{7}{9}}{14} = \frac{7}{9} : 14 = \frac{7}{9 \cdot 14} = \frac{1}{9 \cdot 2} = \mathbf{\frac{1}{18}}$

c) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} = \mathbf{\frac{15}{16}}$

d) $\dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{16}{25}} = \frac{8}{15} : \frac{16}{25} = \frac{8}{15} \cdot \frac{25}{16} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \mathbf{\frac{5}{6}}$

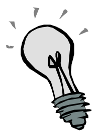


8. Verbindung der Rechenarten

Merke:

Kommen in einem Rechenausdruck sowohl „Punktrechnungen“ als auch „Strichrechnungen“ vor, muss man nach folgenden Regeln vorgehen:

- **Klammerregel**:
  Terme in Klammern müssen zuerst berechnet werden.
- **Punkt-vor-Strich-Regel**:
  Punktrechnungen (mal, geteilt) müssen vor Strichrechnungen (plus, minus) durchgeführt werden.



Beispiel:

Berechne.

a) $\frac{11}{5}+\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{5}\right)$ b) $\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}$ c) $\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}$ d) $\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}-\frac{4}{21}\cdot\frac{7}{2}$

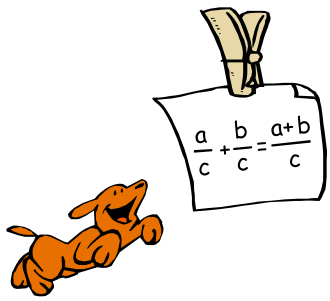
Lösung:

a) $\frac{11}{5}+\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{5}\right)=\frac{11}{5}+\frac{4}{5}=\frac{15}{5}=\mathbf{3}$

b) $\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}=\mathbf{\frac{2}{5}}$

c) $\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\left(\frac{2}{15}+\frac{5}{15}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{7}{15}\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{28}{75}}$

d) $\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}-\frac{4}{21}\cdot\frac{7}{2}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\mathbf{\frac{1}{12}}$



1) Was sind die Bestandteile eines Bruchs und was bedeuten sie ?

2) Wie schreibt man einen Bruch $\frac{a}{b}$ als Quotient ? ____

3) Wie erweitert bzw. kürzt man einen Bruch ?

4) Wie ordnet man gleichnamige bzw. ungleichnamige Brüche der Größe nach ?

5) Wie bestimmt man den Hauptnenner bzw. das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei Brüchen ? (Eine Möglichkeit genügt.)

6) Wie addiert bzw. subtrahiert man gleichnamige Brüche ?

7) Was muss man tun, um ungleichnamige Brüche addieren bzw. subtrahieren zu können ?

8) Was sind unechte Brüche und gemischte Zahlen ?

9) Wie kann man unechte Brüche und gemischte Zahlen ineinander umwandeln ?

10) Wie multipliziert man einen Bruch mit einer ganzen Zahl ?

11) Wie multipliziert man zwei Brüche miteinander ?

12) Wie dividiert man einen Bruch durch eine ganze Zahl ?

13) Wie dividiert man einen Bruch durch einen anderen Bruch ?

Antworten zur Checkliste:

1) Ein Bruch $\frac{a}{b}$ besteht aus dem Zähler a, dem Nenner b und einem Bruchstrich dazwischen. Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile man das Ganze teilen soll, der Zähler beschreibt, wie viele dieser Teile gemeint sind.

2) Es gilt: $\frac{a}{b} = a : b$ 3) Indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert bzw. dividiert.

4) Man erweitert alle Brüche auf ihren Hauptnenner und vergleicht dann die Zähler miteinander.

5) Erste Möglichkeit: Man erkennt den Hauptnenner anhand der Reihen der beiden Nenner.
Zweite Möglichkeit: Man dividiert einen Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler und multipliziert das Ergebnis mit dem anderen Nenner.
Dritte Möglichkeit: Mithilfe einer Primfaktorzerlegung der beiden Nenner.

6) Man addiert bzw. subtrahiert die Zähler und behält den Nenner bei.

7) Man muss die Brüche zuerst auf einen gemeinsamen Nenner erweitern.

8) In einem unechten Bruch ist der Zähler größer als der Nenner. Eine gemischte Zahl besteht aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch: $a\frac{b}{c}$

9) Es gilt: $a\frac{b}{c} = \frac{c \cdot a + b}{c}$. Ein unechter Bruch wird in eine gemischte Zahl umgewandelt, indem man den Zähler durch den Nenner teilt und den Rest dieser Division bestimmt.

10) Es gilt: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ bzw. $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}$ 11) Es gilt: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ 12) Es gilt: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

13) Indem man den linken Bruch mit dem Kehrwert des rechten Bruchs multipliziert.

Antworten zur Checkliste:

1) Ein Bruch $\frac{a}{b}$ besteht aus dem Zähler a, dem Nenner b und einem Bruchstrich dazwischen. Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile man das Ganze teilen soll, der Zähler beschreibt, wie viele dieser Teile gemeint sind.

2) Es gilt: $\frac{a}{b} = a : b$ 3) Indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert bzw. dividiert.

4) Man erweitert alle Brüche auf ihren Hauptnenner und vergleicht dann die Zähler miteinander.

5) Erste Möglichkeit: Man erkennt den Hauptnenner anhand der Reihen der beiden Nenner.
Zweite Möglichkeit: Man dividiert einen Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler und multipliziert das Ergebnis mit dem anderen Nenner.
Dritte Möglichkeit: Mithilfe einer Primfaktorzerlegung der beiden Nenner.

6) Man addiert bzw. subtrahiert die Zähler und behält den Nenner bei.

7) Man muss die Brüche zuerst auf einen gemeinsamen Nenner erweitern.

8) In einem unechten Bruch ist der Zähler größer als der Nenner. Eine gemischte Zahl besteht aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch: $a\frac{b}{c}$

9) Es gilt: $a\frac{b}{c} = \frac{c \cdot a + b}{c}$. Ein unechter Bruch wird in eine gemischte Zahl umgewandelt, indem man den Zähler durch den Nenner teilt und den Rest dieser Division bestimmt.

10) Es gilt: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ bzw. $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}$ 11) Es gilt: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ 12) Es gilt: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

13) Indem man den linken Bruch mit dem Kehrwert des rechten Bruchs multipliziert.

Sehr geehrte Lehrerinnen und Lehrer,

mit diesen Folienvorlagen können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern effektiv und kräfteschonend das Thema „*Bruchrechnung*“ vermitteln. Alle OHP-Folien sind so konzipiert, dass Ihnen aufwendige Erklärungen an der Tafel erspart bleiben.

Jedes Kapitel beginnt mit einem einführenden Beispiel, mit dessen Hilfe sich die Schüler/innen die jeweiligen Regeln und Kenntnisse selbstständig erarbeiten können. Wichtige mathematische Sätze und Zusammenfassungen sind in „*Merkekästen*“ hervorgehoben, die Ihre Schüler/innen direkt von der Folie abschreiben können. Im Anschluss daran folgen jeweils Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen, die ebenfalls von der Folie ins Schulheft übertragen werden können. Am Ende der Unterrichtseinheit finden Sie eine Checkliste, mit der die Schüler/innen den eigenen Kenntnisstand in kompakter Form überprüfen und wiederholen können.

Wie Sie nun die einzelnen Folien optimal im Unterricht einsetzen, zeigen Ihnen folgende Hinweise.

Kapitel 1: Brüche und Bruchteile

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen die Bedeutung der Bruchschreibweise kennen und können Bruchteile von Größen berechnen.

Hinweise zur Durchführung:

Im einführenden Beispiel sollen sich die Schüler/innen anhand zweier Figuren überlegen, wie man markierte Flächenanteile quantitativ beschreiben kann. Auf diese Weise werden sie mit der Bruchschreibweise vertraut gemacht. Die entsprechende Definition ist im *Merkekasten* auf Folie 2 enthalten. In Übung 1 sollen die Schüler/innen dann in geometrischen Figuren die Fläche markie-ren, die jeweils von einem Bruch beschrieben wird. Zum Abzeichnen dieser Figuren ist (insbesondere bei Figur C) eventuell etwas Hilfestellung nötig. In Übung 2 sollen schließlich Bruchteile von alltäglichen Größen wie Längen und Massen u. a. berechnet werden. Beide Übungen sollten allen Schüler/innen keine allzu große Mühe bereiten. Mit dem Exkurs auf Folie 3 können Sie den Schülerinnen und Schülern demonstrieren, warum man einen Bruch auch als Quotient zwischen Zähler und Nenner schreiben kann. Dieser Zusammenhang wird insbesondere in Kapitel 7 benötigt.

Zeitbedarf: ca. 1 Schulstunde; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 2: Erweitern und Kürzen von Brüchen

Lernziele:

Die Schüler/innen lernen, wie man einen Bruch kürzt und erweitert. Sie erkennen, dass man gleichwertige Brüche durch Kürzen oder Erweitern ineinander umwandeln kann.

Hinweise zur Durchführung:

Zunächst sollen die Schüler/innen zwei gleichwertige Brüche in einen Zahlenstrahl eintragen und selbstständig überlegen, wie man den einen Bruch in den anderen umwandeln kann. Auf diese Weise entdecken die Schüler/innen das Erweitern und Kürzen von Brüchen. Bei Problemen, die Brüche auf den Zahlenstrahl einzutragen, hilft der Tipp zum Beispiel auf Folie 5 weiter. Im *Merkekasten* (Folie 5) werden die Begriffe *Erweitern* und *Kürzen* von Brüchen definiert. Auf Folie 6 kann dann das Kürzen und Erweitern von Brüchen geübt werden.

Zeitbedarf: ca. 1-2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 3: Größenvergleich von Brüchen - der Hauptnenner

Lernziele:

Dieses Kapitel macht die Schülerinnen und Schülern mit den Begriffen *gleichnamige* und *ungleichnamige Brüche* und *Hauptnenner* vertraut. Sie lernen außerdem, wie man gleichnamige Brüche der Größe nach ordnet und ungleichnamige Brüche auf den kleinsten gemeinsamen Nenner bringt.

Hinweise zur Durchführung:

In Beispiel 1 auf Folie 7 sollen die Schüler/innen mithilfe geeigneter Zahlenstrahlen zwei Reihen von Brüchen jeweils der Größe nach ordnen. Dabei sollen sie selbstständig erkennen, nach welcher Regel sich gleichnamige Brüche (Reihe A) der Größe nach ordnen lassen. Wie man den Hauptnenner von ungleichnamigen Brüchen bestimmt, zeigt Beispiel 2 auf Folie 8. In der Lösung dazu werden drei Möglichkeiten zur Bestimmung des Hauptnenners vorgestellt. Variante A (Vergleich beider Reihen) ist recht einfach, aber bei großen Zahlen auch sehr aufwendig. Variante B zeigt, wie man das kleinste gemeinsame Vielfache mithilfe des größten gemeinsamen Teilers berechnen kann. Diese Methode kann auch bei großen Zahlen schnell durchgeführt werden. In Variante C wird das kleinste gemeinsame Vielfache über die Primfaktorzerlegung der Nenner ermittelt. Dies ist allerdings bei größeren Zahlen recht aufwendig und bereitet vielen Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß immer einige Mühe.

In der abschließenden Übung auf Folie 9 sollen die Schüler/innen dann den Hauptnenner von Brüchen bestimmen, Brüche auf den Hauptnenner erweitern und der Größe nach ordnen.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 4: Addition und Subtraktion von Brüchen

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man gleichnamige und ungleichnamige Brüche addiert und subtrahiert.

Hinweise zur Durchführung:

Die Regel zur Addition bzw. Subtraktion gleichnamiger Brüche können sich die Schüler/innen in Beispiel 1 auf Folie 10 selbstständig erarbeiten, indem sie sich die Addition bzw. Subtraktion grafisch veranschaulichen. Mit den abgebildeten Streifen ist dies erfahrungsgemäß für die wenigsten Schüler/innen ein Problem. In Übung 1 kann die Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche geübt werden. Die Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche sollen die Schüler/innen in Beispiel 2 zuerst mithilfe eines Zahlenstrahls durchführen. Der „Trick", ungleichnamige Brüche zuerst auf den Hauptnenner zu erweitern, wird in der Lösung zu Beispiel 2 und im *Merkekasten* auf Folie 11 verraten. (Stärkere Schüler/innen kommen eventuell selbst drauf.) In der Übung 2 (Folie 12) kann dann die Addition bzw. Subtraktion ungleichnamiger Brüche geübt werden.

Zeitbedarf: ca. 2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 5: Unechte Brüche und gemischte Zahlen

Lernziele:

Die Schüler/innen erkennen, was unechte Brüche und gemischte Zahlen sind und wie man sie ineinander umwandeln kann.

Hinweise zur Durchführung:

In Beispiel 1 werden die Schüler/innen mit gemischten Zahlen anhand der Lage auf einem geeigneten Zahlenstrahl vertraut gemacht. Gleichzeitig sollen sie am Zahlenstrahl selbstständig erkunden, wie man einen unechten Bruch als Summe einer natürlichen Zahl und eines echten Bruchs schreiben kann. Der *Merkekasten* auf Folie 13 enthält die Definition der Begriffe *unechter Bruch* und *gemischte Zahl*. In Beispiel 2 sollen sich die Schüler/innen dann überlegen, wie man eine gemischte Zahl möglichst geschickt in einen unechten Bruch und umgekehrt einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl umwandeln kann. Der *Merkekasten* auf Folie 14 fasst beide Umwandlungsarten zusammen. In den beiden Übungen auf Folie 15 kann geübt werden, wie man unechte Brüche und gemischte Zahlen ineinander umwandelt.

Zeitbedarf: ca. 1-2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 6: Multiplikation von Brüchen

Lernziele:

Die Schüler/innen lernen, wie man eine natürliche Zahl mit einem Bruch und wie man zwei Brüche miteinander multipliziert. Darüber hinaus erkennen sie, dass man den Bruchteil von einer Größe durch Multiplikation des Bruchs mit dieser Größe berechnen kann.

Hinweise zur Durchführung:

Anhand von Beispiel 1 können die Schüler/innen die Regel, wie man eine natürliche Zahl mit einem Bruch multipliziert, selbstständig erkunden. Außerdem lernen die Schüler/innen in diesem Beispiel, dass der Bruchteil „$\frac{a}{b}$ von c" als Produkt „$\frac{a}{b} \cdot c$" berechnet werden kann und warum dies so ist. Diese Beziehung wird dann in Beispiel 2 benötigt, wo die Schüler/innen die Multiplikationsregel für ein Produkt aus zwei Brüchen erkunden können. Hier sollen die Schüler/innen zunächst den Bruchteil $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$ mithilfe eines Rechtecks aus 20 Kästchen bestimmen. Indem die Schüler/innen dann das Ergebnis mit dem Produkt $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ vergleichen, erkennen sie die Multiplikationsregel für Brüche. Diese Regel steht dann ausdrücklich im *Merkekasten* auf Folie 18. Das Kapitel endet nach einem Tipp zum Überkreuzkürzen mit einer Übung zur Multiplikation von Brüchen.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 7: Division von Brüchen

Lernziele:

Die Schüler/innen lernen, wie man einen Bruch durch eine natürliche Zahl dividiert und wie man eine Division durch einen Bruch ausführt.

Hinweise zur Durchführung:

In Beispiel 1 sollen die Schüler/innen den Quotienten zwischen einem Bruch und einer natürlichen Zahl mithilfe eines Zahlenstrahls bestimmen. Durch die geschickte Wahl der Längeneinheit sollte dies auch für schwächere Schüler/innen kein Problem sein. Die entsprechende Rechenregel wird deutlich, wenn die Schüler/innen jeweils die Zahlen von Dividend und Teiler mit dem Ergebnis vergleichen. Das Beispiel 2 auf Folie 20 zeigt, nach welcher Rechenregel man durch einen Bruch teilt. Die Regeln zur Division mit Brüchen sind in den *Merkekästen* auf Folie 20 zusammengefasst. In den Übungen auf Folie 21 kann die Division mit Brüchen und das Vereinfachen von Doppelbrüchen geübt werden.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Checkliste - was man nun wissen sollte

Anhand der Fragen der Checkliste auf Folie 23 können Sie die wichtigsten Kenntnisse zum Thema „*Bruchrechnung*" in kompakter Form abfragen und wiederholen. Auf diese Weise erhalten Ihre Schüler/innen einen guten Überblick über den eigenen Kenntnisstand. Die Antworten auf die Fragen finden Sie als Kopiervorlage in doppelter Ausführung, sodass Sie nur jeweils 1 Blatt für zwei Schüler/innen kopieren müssen.

Zeitbedarf: ca. 30 min.