Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2014:

Lösungen zur Prüfung 2014: Pflichtbereich

Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Dreiecks EBC gilt: $u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CE}$. Die Länge $\overline{CE}$ kann im Dreieck ECD mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{DE}$ kennt (siehe Figur 1). Die Länge $\overline{DE}$ kann im Dreieck AED mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Mit den Längen $\overline{DE}$ und $\overline{CD} = 5{,}8$ cm kann im Dreieck ECD der Winkel ε_2 berechnet werden, woraus sich mit $\varepsilon_1 = 54{,}6^\circ$ sofort der Winkel ε_3 ergibt (siehe Figur 2). Die fehlenden Längen $\overline{EB}$ und $\overline{BC}$ erhält man dann mithilfe des Winkels ε_3 und der Länge $\overline{EC}$ im Dreieck EBC (siehe Figur 3).

Tipp: *Wenn Sie den Lösungsweg zunächst nicht erkennen, sollten Sie zuerst alle Seiten bzw. Winkel des Dreiecks AED berechnen. Anschließend erkennen Sie leicht, wie man auch alle Seiten und Winkel im Dreieck ECD berechnen kann. Der Rest des Lösungswegs ergibt sich dann fast von selbst.*

Für den Umfang des Dreiecks EBC gilt: $\mathbf{u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CE}}$. Die drei Längen $\overline{EB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CE}$ können folgendermaßen berechnet werden:

Berechnung der Länge $\overline{CE}$:

Im Dreieck ECD gilt (siehe Figur 1): $\mathbf{\overline{CE}^2 = 5{,}8^2 + \overline{DE}^2}$

$\rightarrow$ Berechnung der Länge $\overline{DE}$:

Für $\overline{DE}$ gilt im Dreieck AED (siehe Figur 1):

$$\cos 54{,}6^\circ = \frac{3{,}2}{\overline{DE}} \quad | \cdot \overline{DE}$$

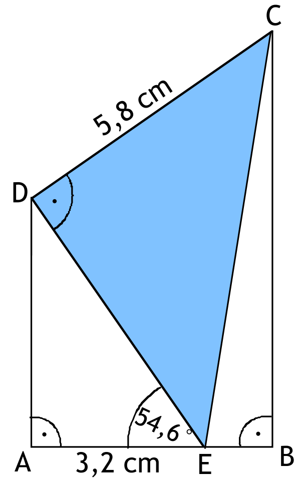
$$\Leftrightarrow \quad \overline{DE} \cdot \cos 54{,}6^\circ = 3{,}2 \quad | : \cos 54{,}6^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{DE} = 5{,}52 \text{ cm}$$

Damit folgt durch Einsetzen in $\overline{CE}^2 = 5{,}8^2 + \overline{DE}^2$:

$$\overline{CE}^2 = 64{,}11 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{\overline{CE} = 8{,}01 \text{ cm}}$$



Figur 1

Berechnung der Länge $\overline{EB}$:

Die Länge $\overline{EB}$ kann im Dreieck EBC berechnet werden, wenn man den Winkel ε_3 kennt (siehe Figur 2). Es gilt: $\cos \varepsilon_3 = \frac{\overline{EB}}{8{,}01}$

Für den Winkel ε_3 gilt: $180^\circ = 54{,}6^\circ + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad | -54{,}6^\circ - \varepsilon_2$

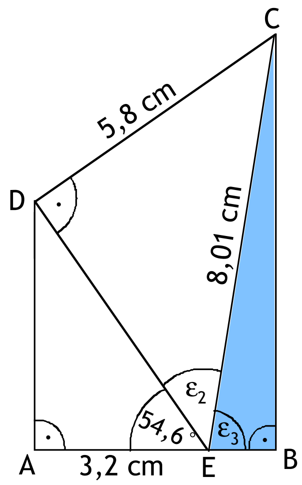
$$\Leftrightarrow \quad 125{,}4^\circ - \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_3 = 125{,}4^\circ - \varepsilon_2$$

Der Winkel ε_2 kann im Dreieck ECD mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

$$\sin \varepsilon_2 = \frac{5{,}8}{8{,}01} \quad | \sin^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_2 = 46{,}4^\circ$$

Damit folgt: $\underline{\varepsilon_3 = 79{,}0^\circ}$



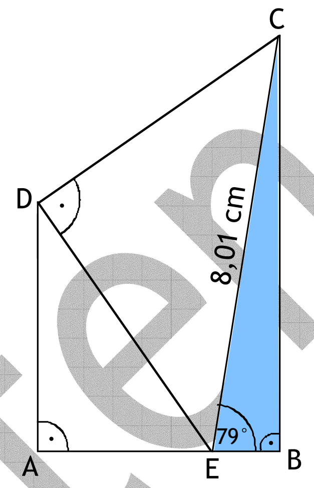
Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2014: Pflichtbereich

Mit $\varepsilon_3 = 79{,}0^\circ$ erhält man (siehe Figur 3):

$$\cos 79^\circ = \frac{\overline{EB}}{8{,}01} \quad | \cdot 8{,}01$$

$$\Leftrightarrow \quad 1{,}53 = \overline{EB} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{EB} = 1{,}53\ cm}$$



Figur 3

Berechnung der Länge $\overline{BC}$:

Die Länge $\overline{BC}$ kann im Dreieck EBC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Es gilt:

$$\sin 79^\circ = \frac{\overline{BC}}{8{,}01} \quad | \cdot 8{,}01$$

$$\Leftrightarrow \quad 7{,}86 = \overline{BC} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{BC} = 7{,}86\ cm}$$

Mit $\overline{CE} = 8{,}01$ cm, $\overline{EB} = 1{,}53$ cm und $\overline{BC} = 7{,}86$ cm erhält man schließlich den gesuchten Umfang: **u = 17,4 cm**

Ergebnis: Der Umfang u des Dreiecks EBC beträgt **u = 17,4 cm**.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

Die Länge $\overline{DE}$ kann im Dreieck DBE mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel β und die Länge $\overline{DB}$ kennt (siehe Figur 1).

- Der Winkel β lässt sich sofort mit der Winkelsumme im Dreieck ABC berechnen.
- Für die Länge $\overline{DB}$ gilt: $\overline{DB} = 6{,}2 - \overline{AD}$. Die Länge $\overline{AD}$ kann im Dreieck ADM mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{AM}$ kennt, die laut Aufgabenstellung die Hälfte von $\overline{AC}$ sein soll. Die Länge $\overline{AC}$ wiederum kann im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnet werden (Figur 3).

Tipp: *Wenn Sie den Lösungsweg zunächst nicht erkennen, sollten Sie zuerst alle Seiten bzw. Winkel des Dreiecks ABC berechnen. Anschließend erkennen Sie, dass man auch alle Seiten und Winkel im Dreieck ADM berechnen kann. Der Rest des Lösungswegs ergibt sich dann fast von selbst.*

Für die Länge $\overline{DE}$ gilt (siehe Figur 1): $\tan\beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} \quad | \cdot \overline{DB}$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{DB} \cdot \tan\beta = \overline{DE} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{DE} = \overline{DB} \cdot \tan\beta}$$

Es müssen also noch der Winkel β und die Strecke $\overline{DB}$ berechnet werden.

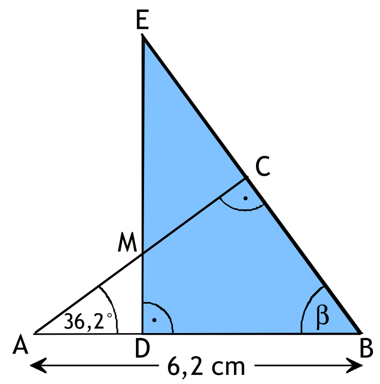
Berechnung des Winkels β:

Für die Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC gilt:

$$36{,}2^\circ + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

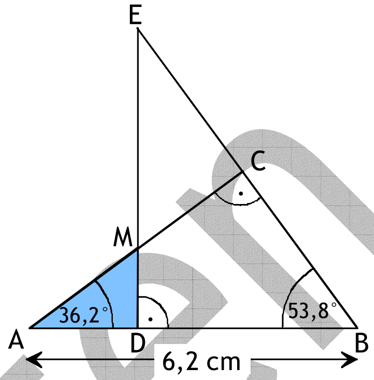
$$\Leftrightarrow \quad 126{,}2^\circ + \beta = 180^\circ \quad | -126{,}2^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 53{,}8^\circ}$$

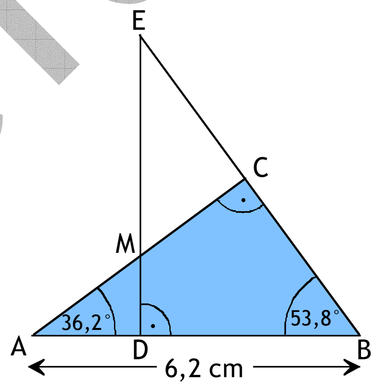


Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2014: Pflichtbereich



Figur 2



Figur 3

<u>Berechnung der Länge $\overline{DB}$:</u>

Für die Länge $\overline{DB}$ gilt: $\overline{DB} = 6{,}2 - \overline{AD}$ (siehe Figur 2).

$\rightarrow$ <u>Berechnung der Länge $\overline{AD}$:</u>

Die Länge $\overline{AD}$ kann im Dreieck ADM mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{AM}$ kennt (siehe Figur 2).

Es gilt: $\cos 36{,}2^\circ = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AM}}$

Da laut Aufgabenstellung der Punkt M die Strecke AC halbiert, gilt: $\overline{AM} = 0{,}5 \cdot \overline{AC}$

Die Länge $\overline{AC}$ wiederum kann im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3).

Es gilt: $\cos 36{,}2^\circ = \dfrac{\overline{AC}}{6{,}2} \quad | \cdot 6{,}2$

$\Leftrightarrow \quad 5{,}0 = \overline{AC}$ bzw. $\overline{AC} = 5{,}0$ cm

Damit ist $\overline{AM} = 2{,}5$ cm.

Einsetzen von $\overline{AM} = 2{,}5$ cm in $\cos 36{,}2^\circ = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AM}}$ ergibt:

$\Leftrightarrow \quad \cos 36{,}2^\circ = \dfrac{\overline{AD}}{2{,}5} \quad | \cdot 2{,}5$

$\Leftrightarrow \quad 2{,}02 = \overline{AD}$ bzw. $\overline{AD} = 2{,}02$ cm

Für die Länge $\overline{DB} = 6{,}2 - \overline{AD}$ folgt somit: $\mathbf{\overline{DB} = 4{,}18}$ **cm**

Und für $\overline{DE} = \overline{DB} \cdot \tan\beta$ folgt schließlich mit $\overline{DB} = 4{,}18$ cm und $\beta = 53{,}8^\circ$: $\mathbf{\overline{DE} = 5{,}71}$ **cm**

<u>Ergebnis</u>: Die Länge $\overline{DE}$ ist <u>$\mathbf{\overline{DE} = 5{,}71}$ **cm**</u>.

Lösungen zur Prüfung 2014: Pflichtbereich

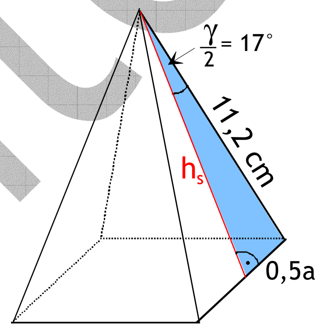
Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:
Weil sich das Volumen der Pyramide beim Einschmelzen zur Kugel nicht ändert, muss man zunächst das Pyramidenvolumen berechnen. Mit der Volumenformel einer Kugel kann man dann daraus den gesuchten Radius berechnen.

Der Kugelradius r kann mit der Volumenformel einer Kugel berechnet werden, wenn man das Kugelvolumen kennt. Es gilt (siehe Formelsammlung): $\mathbf{V_K = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$

Berechnung des Pyramidenvolumens:

Für das Pyramidenvolumen gilt (siehe Formelsammlung): $V_p = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$



Figur 1

→ Berechnung der Kantenlänge a:

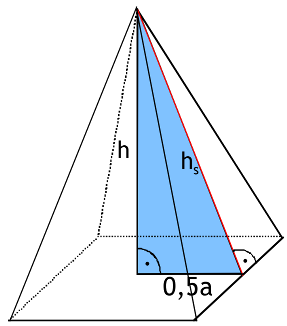
Die Kantenlänge a kann im markierten Dreieck der Figur 1 mit der Sinusfunktion berechnet werden. (Man beachte, dass die Seitenhöhe h_s die Seitenfläche der Pyramide halbiert.) Es gilt:

$$\sin 17^\circ = \frac{0{,}5a}{11{,}2} \quad | \cdot 11{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3{,}27 = 0{,}5a \quad | :0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad 6{,}54 = a \text{ bzw. } \mathbf{a = 6{,}54\ cm}$$

→ Berechnung der Pyramidenhöhe h:



Figur 2

Die Pyramidenhöhe h kann im markierten Dreieck der Figur 2 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Seitenhöhe h_s kennt. Es gilt: $\mathbf{h_s^2 = h^2 + (0{,}5a)^2}$
Die Seitenhöhe h_s wiederum kann mit der Kosinusfunktion im markierten Dreieck der Figur 1 berechnet werden. Es gilt:

$$\cos 17^\circ = \frac{h_s}{11{,}2} \quad | \cdot 11{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad 10{,}71 = h_s \text{ bzw. } h_s = 10{,}71\ \text{cm}$$

Einsetzen von a = 6,54 cm und h_s = 10,71 cm in $h_s^2 = h^2 + (0{,}5a)^2$ ergibt:

$$114{,}70 = h^2 + 10{,}69 \quad | -10{,}69$$

$$\Leftrightarrow \quad 104{,}01 = h^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad 10{,}20 = h \text{ bzw. } \mathbf{h = 10{,}20\ cm}$$

Damit erhält man für das Pyramidenvolumen $V_p = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$: $\mathbf{V_p = 145{,}42\ cm^3}$

Berechnung des Kugelradius' r:

Einsetzen von $V_p = V_K = 145{,}42\ \text{cm}^3$ in die Formel $V_K = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ ergibt:

$$145{,}42 = 4{,}19 \cdot r^3 \quad | :4{,}19$$

$$\Leftrightarrow \quad 34{,}71 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$$

$$\Rightarrow \quad 3{,}26 = r \text{ bzw. } \mathbf{r = 3{,}26\ cm}$$

Ergebnis: Der Radius der Kugel ist **r = 3,26 cm**.