Inhalt der Lösungen zur Musterprüfung 4:

Teil A_1 und A_2 - Pflichtteil:

Teil B - Wahlteil:

Lösungen zur Musterprüfung 4: Teil A1

Teil A1 - Aufgabe 1:

Es gilt: $\dfrac{\sqrt{125a^2}}{\sqrt{10}} = \dfrac{a \cdot \sqrt{125}}{\sqrt{10}} = a \cdot \sqrt{\dfrac{125}{10}} = a \cdot \sqrt{\dfrac{25}{2}} = 5a \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}} = 5a \cdot \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = 5a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(Hinweis: Kürzen von $\frac{125}{10}$ mit 5 ergibt $\frac{25}{2}$.)

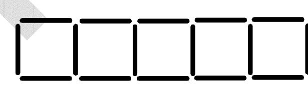
Rationalmachen des Nenners in $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt: $5a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 5a \cdot \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 5a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{\dfrac{5}{2} a\sqrt{2}}$

Was zu zeigen war.

Teil A1 - Aufgabe 2:

Anzahl der Streichhölzer für 5 Quadrate:

Die Anzahl der Streichhölzer für 5 Quadrate kann leicht durch Abzählen bestimmt werden. Man erhält: **16 Streichhölzer**



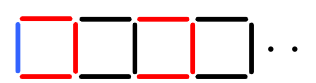
Figur 1

Der Term für die Anzahl der Streichhölzer für n Quadrate:

Zunächst lege man in Gedanken nur ein Streichholz hin; siehe blauer Strich in nebenstehender Zeichnung. Für jedes Quadrat, das man dann an das erste Streichholz anfügen will, benötigt man 3 Streichhölzer. Diese Streichhölzer sind abwechselnd rot und schwarz gekennzeichnet.

Somit gilt für die Anzahl Z_n für n Quadrate: $\mathbf{Z_n = 1 + 3n}$

(Hinweis: Für n = 5 erhält man das obige Ergebnis: $Z_5 = 1 + 15 = 16$)



Figur 2

Teil A1 - Aufgabe 3:

Berechnung der Längen a, $\overline{RM}$ und h:

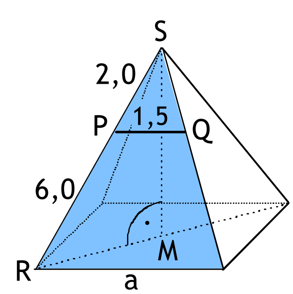
• Die **Länge a** kann in der Strahlensatzfigur (siehe Figur 3) mit dem zweiten Strahlensatz berechnet werden. Darin gilt:

$$\frac{a}{1{,}5} = \frac{6{,}0 + 2{,}0}{2{,}0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{1{,}5} = \frac{8{,}0}{2{,}0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{1{,}5} = 4 \quad | \cdot 1{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{a = 6{,}0\ cm}$$

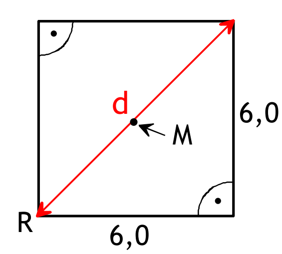


Figur 3

• Die **Strecke $\overline{RM}$** ist die Hälfte der Diagonale d der quadratischen Grundfläche mit der Seitenlänge a = 6,0 cm (siehe Figur 4).

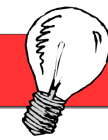
Mit der Formel $d = a\sqrt{2}$ erhält man: $d = 6\sqrt{2}$

Aus $\overline{RM} = 0{,}5d$ folgt: $\mathbf{\overline{RM} = 3\sqrt{2}}$

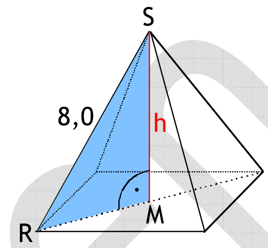


Figur 4

Lösungen zur Musterprüfung 4: Teil A1



• Die **Pyramidenhöhe h** kann mit dem Satz des Pythagoras in dem markierten Dreieck der Figur 5 berechnet werden. Darin gilt: $\overline{RM}^2 + h^2 = 8{,}0^2$



Figur 5

Mit $\overline{RM} = 3\sqrt{2}$ folgt:

$(3\sqrt{2})^2 + h^2 = 8{,}0^2$

$\Leftrightarrow \quad 9 \cdot 2 + h^2 = 64$

$\Leftrightarrow \quad 18 + h^2 = 64 \quad | \ -18$

$\Leftrightarrow \quad h^2 = 46 \quad | \ \sqrt{}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{h = \sqrt{46}}$

Teil A1 - Aufgabe 4:

<u>Die Wahrscheinlichkeit, dass jede Position des Reißnagels einmal vorkommt:</u>

Die beiden Ausgänge, die zu dem Ereignis E *„Jede Position kommt einmal vor.“* gehören, sind (A; B) und (B; A). Darin bedeutet „(A; B)“, dass der Reißnagel zuerst seitlich (A) landet und dann beim zweiten Wurf auf der runden Fläche (B). Beim Ausgang „(B; A)“ ist es gerade umgekehrt.

Mit der Produktregel erhält man: $P(A;\,B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ und $P(B;\,A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Mit der Summenregel erhält man für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E:

$\mathbf{P(E)} = P(A;\,B) + P(B;\,A) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \mathbf{\frac{4}{9}}$

<u>Ergebnis:</u> Die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweimaligen Werfen des Reißnagels jede Position einmal vorkommt, ist $\mathbf{P(E)} = \mathbf{\frac{4}{9}}$.

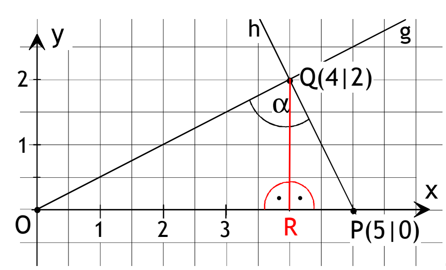
Teil A1 - Aufgabe 5:

<u>Der Nachweis, dass das Dreieck OPQ rechtwinklig ist:</u>

Wenn das Dreieck OPQ rechtwinklig sein soll mit $\alpha = 90^\circ$, muss der Satz des Pythagoras gelten (siehe Figur 5): $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2$

Die Strecke $\overline{OP}$ ist $\mathbf{\overline{OP} = 5}$.

Die Strecken $\overline{OQ}$ und $\overline{PQ}$ können mit dem Satz des Pythagoras jeweils in den Dreicken ORQ und RPQ berechnet werden (siehe Figur 5). Man erhält:



Figur 5

$\overline{OQ}^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \;\Rightarrow\; \mathbf{\overline{OQ} = \sqrt{20}}$

$\overline{PQ}^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \;\Rightarrow\; \mathbf{\overline{PQ} = \sqrt{5}}$

Einsetzen von $\overline{OQ} = \sqrt{20}$, $\overline{PQ} = \sqrt{5}$ und $\overline{OP} = 5$ in $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2$ ergibt:

$\sqrt{20}^{\,2} + \sqrt{5}^{\,2} = 5^2 \;\Leftrightarrow\; 20 + 5 = 25$

Das ist eine wahre Aussage. Somit gilt im Dreieck OPQ der Satz des Pythagoras. Das Dreieck OPQ ist also rechtwinklig mit $\alpha = 90^\circ$. **Was zu zeigen war.**

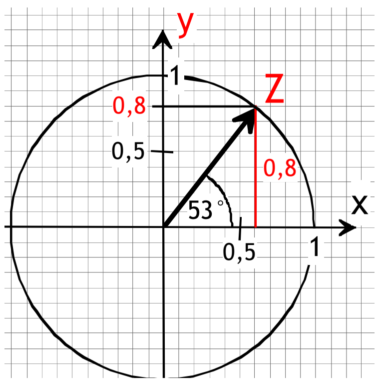
Lösungen zur Musterprüfung 4: Teil A1

Teil A1 - Aufgabe 6:

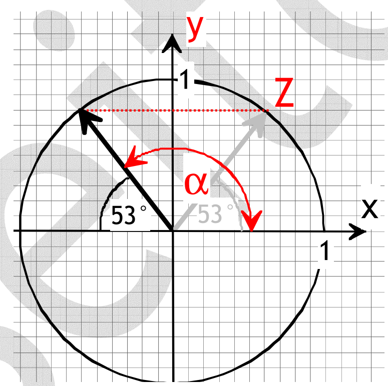
Der Wert von sin 53° und ein weiterer Winkel α mit sin α = sin 53°:

• Der Wert von sin 53° ist die y-Koordinate der Zeigerspitze Z im Einheitskreis (siehe Figur 6).
Wie man im Einheitskreis ablesen kann, gilt: **sin 53° ≈ 0,8**

• Einen weiteren Winkel α mit sin α = sin 53° erhält man, indem man im Einheitskreis den Zeiger des Winkels 53° an der y-Achse spiegelt (siehe Figur 7). Aus Symmetriegründen muss dann gelten:
α = 180° – 53° = 127°. Der weitere Winkel α mit sin α = sin 53° ist also **α = 127°**.



Figur 6

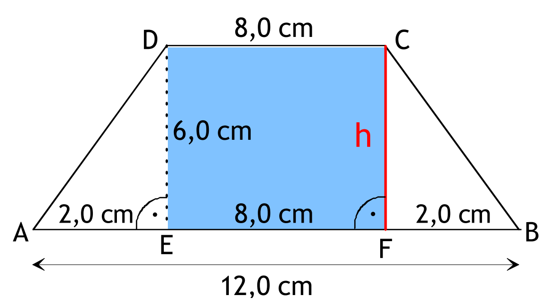


Figur 7

Teil A1 - Aufgabe 7:

Der Flächeninhalt des Trapezes ABCD:

Um den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes ABCD zu berechnen, sollte man zuerst die Höhe h auch von der Ecke C aus auf die Grundseite AB einzeichnen (siehe Figur 8). Das Trapez besteht dann aus dem Rechteck EFCD und den beiden kongruenten Dreiecken AED und FBC.



Figur 8

Aus $\overline{AE}$ + 8,0 cm + $\overline{FB}$ = 12,0 cm und $\overline{AE} = \overline{FB}$ folgt:

$\overline{AE}$ = 2,0 cm und $\overline{FB}$ = 2,0 cm

(Hinweis: $\overline{AE} = \overline{FB}$ gilt deshalb, weil das Trapez ABCD *gleichschenklig* ist.)

Damit erhält man folgende Flächeninhalte:

$A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0 \cdot 6{,}0 = 6{,}0\ \text{cm}^2$ und $A_{FBC} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0 \cdot 6{,}0 = 6{,}0\ \text{cm}^2$;

$A_{EFCD} = 8{,}0 \cdot 6{,}0 = 48{,}0\ \text{cm}^2$

Das Trapez ABCD hat somit den Flächeninhalt:

$A_{ABCD} = 6{,}0\ \text{cm}^2 + 48{,}0\ \text{cm}^2 + 6{,}0\ \text{cm}^2 = \mathbf{60{,}0\ cm^2}$

Ergebnis: Das Trapez ABCD hat den Flächeninhalt $\mathbf{A_{ABCD} = 60{,}0\ cm^2}$.

Lösungen zur Musterprüfung 4: Teil A2

Teil A2 - Aufgabe 1:

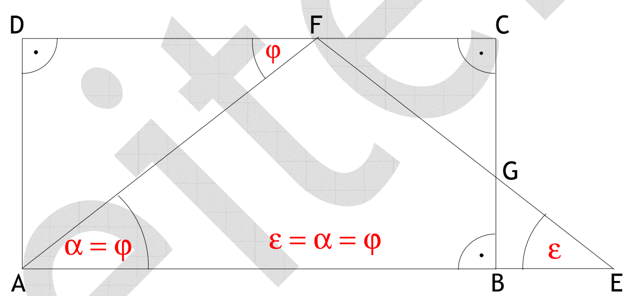
<u>Berechnung des Flächeninhalts A_{BEG}:</u>

Für den Flächeninhalt des Dreiecks A_{BEG} gilt (siehe Figur 1): $A_{BEG} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{BG}}{2}$

Die Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{BG}$ kann man berechnen, wenn man im rechtwinkligen Dreieck BEG den **Winkel ε** und die **Strecke $\overline{EG}$** kennt.

→ <u>Berechnung des Winkels ε:</u>

Den Winkel ε bestimmt man mit folgendermaßen:
Der Winkel α ist Wechselwinkel zu $\varphi = 38°$, so dass gilt (siehe Figur 1): $\boldsymbol{\alpha = \varphi}$
Weil nun das Dreieck AEF laut Aufgabenstellung gleichschenklig ist mit der Basis AE, sind auch die Basiswinkel α und ε gleich groß: $\alpha = \varepsilon$
Somit folgt: $\boldsymbol{\varepsilon = \varphi}$ bzw. $\underline{\boldsymbol{\varepsilon = 38{,}0°}}$



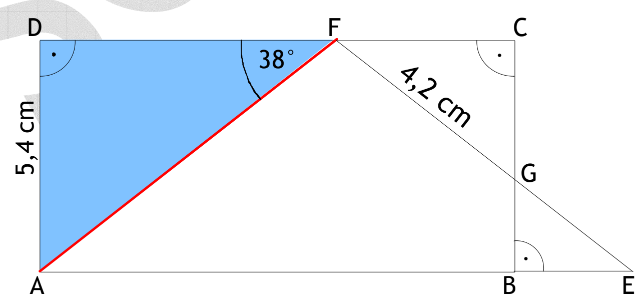
Figur 1

→ <u>Berechnung der Seite $\overline{EG}$:</u>

Für die Strecke $\overline{EG}$ gilt (siehe Figur 2): $\overline{EG} = \overline{EF} - \overline{FG}$
Mit $\overline{FG} = 4{,}2$ cm folgt: $\overline{EG} = \overline{EF} - 4{,}2$ cm

Die Strecke $\overline{EF}$ erhält man aus der Vorgabe $\overline{EF} = \overline{AF}$, da die Strecke $\overline{AF}$ im Dreieck AFD mit der Sinusfunktion berechnet werden kann (siehe Figur 2).

Darin gilt: $\sin 38° = \frac{5{,}4}{\overline{AF}} \Leftrightarrow \overline{AF} = \frac{5{,}4}{\sin 38°} = 8{,}77$ cm



Figur 2

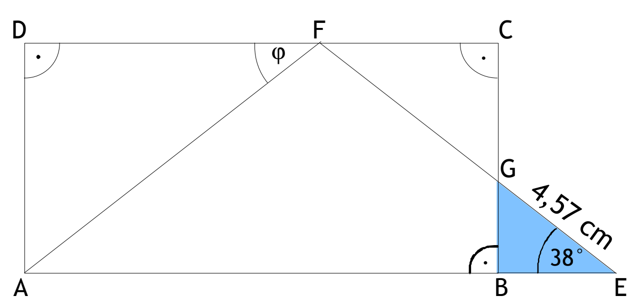
Somit ist auch $\overline{\mathbf{EF}}$ **= 8,77 cm**. Einsetzen in $\overline{EG} = \overline{EF} - 4{,}2$ ergibt:
$\overline{\mathbf{EG}}$ **= 8,77 – 4,2 = <u>4,57 cm</u>**

→ <u>Berechnung der Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{BG}$:</u>

Im Dreieck BEG gilt (siehe Figur 3):

$$\sin 38° = \frac{\overline{BG}}{4{,}57} \quad | \cdot 4{,}57$$

$$\Leftrightarrow 4{,}57 \cdot \sin 38° = \overline{BG} \text{ bzw. } \overline{\mathbf{BG}} = \underline{\mathbf{2{,}81\ cm}}$$



Figur 3

Außerdem gilt (siehe Figur 3): $\cos 38° = \frac{\overline{BE}}{4{,}57} \quad | \cdot 4{,}57$

$$\Leftrightarrow 4{,}57 \cdot \cos 38° = \overline{BE} \text{ bzw. } \overline{\mathbf{BE}} = \underline{\mathbf{3{,}60\ cm}}$$

Einsetzen von $\overline{BG} = 2{,}81$ cm und $\overline{BE} = 3{,}60$ cm in $A_{BEG} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{BG}}{2}$ ergibt: $\mathbf{A_{BEG} = 5{,}06\ cm^2}$

<u>Ergebnis:</u> Der Flächeninhalt des Dreiecks BEG ist <u>$\mathbf{A_{BEG} = 5{,}06\ cm^2}$</u>.

Lösungen zur Musterprüfung 4: Teil A2

Teil A2 - Aufgabe 2:

Berechnung des Pyramidenvolumens:

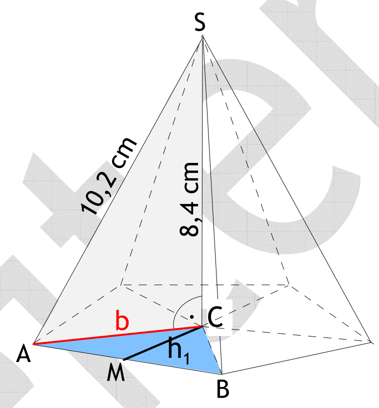
Für das Pyramidenvolumen gilt: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

Die Grundfläche G der Pyramide setzt sich aus 5 identischen gleichschenkligen Dreiecken zusammen (siehe Figur 1).

Es gilt: $\mathbf{G = 5\, A_{ABC}}$

$\rightarrow$ Berechnung des Flächeninhalts A_{ABC}:

Es gilt (siehe Figur 1): $A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h_1$



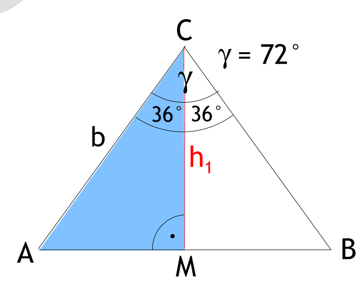
Figur 1

Da das gleichschenklige Dreieck ABC von der Höhe h_1 halbiert wird, gilt (siehe Figur 2): $\overline{AB} = 2\,\overline{AM}$

Damit folgt: $A_{ABC} = \overline{AM} \cdot h_1$

$\rightarrow$ Berechnung der Strecken $\overline{AM}$ und h_1:

Die Strecken $\overline{AM}$ und h_1 können im Dreieck AMC berechnet werden, wenn man die Länge des Schenkels b kennt. Es gilt (siehe Figur 2):



Figur 2

$\sin 36° = \frac{\overline{AM}}{b}$ und $\cos 36° = \frac{h_1}{b}$

Beachte: Der Winkel γ bei C ist 360°: 5 = 72° und wird von der Höhe h_1 halbiert.

$\rightarrow$ Berechnung der Strecke b:

Die Strecke b kann im Dreieck ACS mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 1). Es gilt:

$$b^2 + (8{,}4\text{ cm})^2 = (10{,}2\text{ cm})^2$$
$$\Leftrightarrow \quad b^2 + 70{,}56\text{ cm}^2 = 104{,}04\text{ cm}^2 \qquad | -70{,}56\text{ cm}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad b^2 = 33{,}48\text{ cm}^2 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{b = 5{,}79\ cm}$$

Einsetzen in $\sin 36° = \frac{\overline{AM}}{b}$ ergibt: $\sin 36° = \frac{\overline{AM}}{5{,}79} \qquad | \cdot 5{,}79$

$$\Leftrightarrow \quad 3{,}4 = \overline{AM} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{AM} = 3{,}4\ cm}$$

Für h_1 erhält man durch Einsetzen von b = 5,79 cm in $\cos 36° = \frac{h_1}{b}$:

$$\cos 36° = \frac{h_1}{5{,}79} \qquad | \cdot 5{,}79$$

$$\Leftrightarrow \quad 4{,}68 = h_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{h_1 = 4{,}68\ cm}$$

Lösungen zur Musterprüfung 4: Teil A2

Einsetzen von $\overline{AM}$ = 3,4 cm und h_1 = 4,68 cm in $A_{ABC} = \overline{AM} \cdot h_1$ ergibt: $\mathbf{A_{ABC} = 15{,}91\ cm^2}$

Für G = 5 A_{ABC} folgt somit: $\mathbf{G = 79{,}55\ cm^2}$

Und für das gesuchte Volumen $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ erhält man schließlich mit der vorgegebenen Pyramidenhöhe h = 8,4 cm: $\mathbf{V = 222{,}74\ cm^3}$

Ergebnis: Die Pyramide hat das Volumen **$V = 222{,}74\ cm^3$**.

Teil A2 - Aufgabe 3:

Berechnung der Schnittpunkte von Gerade und nach oben geöffneten Normalparabel:

Um die Schnittpunkte zwischen der Geraden und der Normalparabel berechnen zu können, benötigt man außer der angegebenen Geradengleichung y = 2x – 5 die Gleichung der Normalparabel. Die Gleichung der Normalparabel kann mithilfe ihres Scheitelpunkts S(3|–2) aufgestellt werden.

→ Berechnung der Parabelgleichung:

Einsetzen der Scheitelkoordinaten von S(**3**|**–2**) (d = 3 und e = –2) in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - \mathbf{3})^2 \mathbf{- 2}$$
$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 6x + 9 - 2$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{y = x^2 - 6x + 7}$$

Die Schnittpunkte erhält man durch Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen:

$$x^2 - 6x + 7 = 2x - 5 \quad | -2x + 5$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 12 = 0$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = 4 + \sqrt{16 - 12} \qquad\qquad x_2 = 4 - \sqrt{16 - 12}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x_1 = 6} \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x_2 = 2}$$

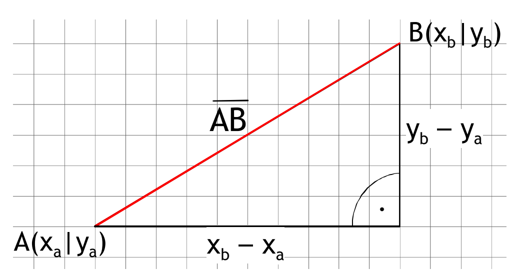
Das sind die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte. Die jeweilige y-Koordinate erhält man durch Einsetzen in die Geradengleichung oder in die Parabelgleichung.

Einsetzen von $x_1 = 6$ in y = 2x – 5 ergibt: $y_1 = 7 \Rightarrow$ **A(6|7)**

Einsetzen von $x_2 = 2$ in y = 2x – 5 ergibt: $y_2 = -1 \Rightarrow$ **B(2|–1)**

Ergebnis: Die Gerade und die Parabel schneiden sich in den Punkten **A(6|7)** und **B(2|–1)**.

Berechnung des Abstands beider Schnittpunkte:



Den Abstand $\overline{AB}$ zweier Punkte A(x_a|y_a) und B(x_b|y_b) berechnet man mit der Formel:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$ (Folgt aus dem Satz des Pythagoras.)

Mit den Koordinaten von A(6|7) und B(2|–1) folgt:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-6)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ergebnis: Der Abstand der Schnittpunkte A und B beträgt $\mathbf{4\sqrt{5}} \approx$ **8,94 LE**.