Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2017:

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich

Aufgabe P1:

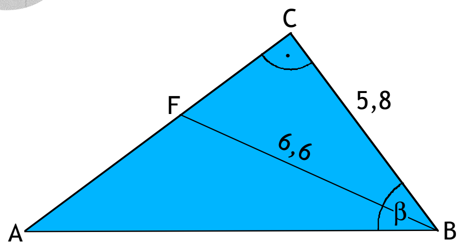
Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Dreiecks ABF gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{AF}$, wobei $\overline{BF} = 6{,}6$ cm bereits angegeben ist.
Die Länge $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel β kennt (siehe Figur 1). Für den Winkel β gilt laut Aufgabenstellung $\beta = 2\,\beta_1$, wobei β_1 im Dreieck BCF mit der Kosinusfunktion berechnet werden kann (siehe Figur 2).
Für die Länge $\overline{AF}$ gilt: $\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{FC}$. Die Länge $\overline{AC}$ kann im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion berechnet werden. Die Länge $\overline{FC}$ kann im Dreieck BCF mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 2).

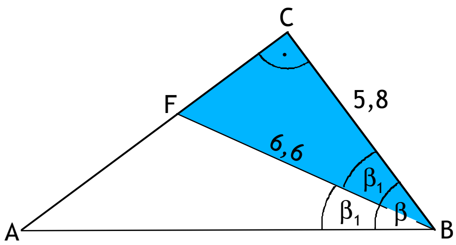
Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck BCF die Länge $\overline{FC}$ und den Winkel β_1 berechnen. Aus β_1 erhält man $\beta = 2\beta_1$, womit man dann im Dreieck ABC die Längen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ berechnen kann.*

Berechnung des Umfangs des Dreiecks ABF:

Für den Umfang des Dreiecks ABF gilt: $u = \overline{AB} + 6{,}6 + \overline{AF}$.



Figur 1



Figur 2

→ Berechnung der Länge $\overline{AB}$:

Für $\overline{AB}$ gilt im Dreieck ABC (siehe Figur 1):

$$\cos\beta = \frac{5{,}8}{\overline{AB}}$$

Für den Winkel β gilt laut Aufgabenstellung $\beta = 2\beta_1$.
Der Winkel β_1 kann im Dreieck BCF mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

$$\cos\beta_1 = \frac{5{,}8}{6{,}6} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 28{,}5^\circ \text{ und damit } \beta = 57{,}0^\circ.$$

Einsetzen von $\beta = 57^\circ$ in $\cos\beta = \frac{5{,}8}{\overline{AB}}$ ergibt:

$$\cos 57^\circ = \frac{5{,}8}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB} \quad | : \cos 57^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB} = \frac{5{,}8}{\cos 57^\circ} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AB} = \underline{10{,}65 \text{ cm}}$$

→ Berechnung der Länge $\overline{AF}$:

Für $\overline{AF}$ gilt: $\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{FC}$.

- Die Länge $\overline{AC}$ kann im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Mit $\beta = 57^\circ$ gilt:

$$\tan 57^\circ = \frac{\overline{AC}}{5{,}8} \quad | \cdot 5{,}8$$

$$\Leftrightarrow \quad 8{,}93 = \overline{AC} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AC} = 8{,}93 \text{ cm}$$

- Die Länge $\overline{FC}$ kann im Dreieck BCF mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich

$$\overline{FC}^2 + 5{,}8^2 = 6{,}6^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{FC}^2 + 33{,}64 = 43{,}56 \quad | \ -33{,}64$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{FC}^2 = 9{,}92 \quad | \ \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad \overline{FC} = 3{,}15 \text{ cm}$$

Mit $\overline{AC} = 8{,}93\,\text{cm}$ und $\overline{FC} = 3{,}15\,\text{cm}$ folgt für $\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{FC}$: $\overline{AF} = \underline{5{,}78 \text{ cm}}$

Mit $\overline{AB} = 10{,}65\,\text{cm}$ und $\overline{AF} = 5{,}78\,\text{cm}$ erhält man schließlich: $u = 10{,}65\,\text{cm} + 6{,}6\,\text{cm} + 5{,}78\,\text{cm} = \mathbf{23{,}03\,cm}$

Ergebnis: Der Umfang des Dreiecks ABF beträgt **u = 23,03 cm**.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

Für die Länge $\overline{EF}$ gilt: $\overline{EF} = \overline{BE} - \overline{BF}$

Die Länge $\overline{BE}$ kann im Dreieck BCE mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).

Für die Länge $\overline{BF}$ gilt: $\overline{BF} = 2 \cdot \overline{BM}$ (siehe Figur 2). Die Strecke $\overline{BM}$ kann im Dreieck ABM berechnet werden, wenn man den Winkel β_1 bei Punkt B kennt (siehe Figur 2). Da dieser Winkel ein Stufenwinkel zu ε ist, beträgt er ebenfalls $72{,}0°$.

Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck BCE alle Seitenlängen und den fehlenden Winkel berechnen. Außerdem sollten Sie im gleichschenkligen Dreieck ABF die Höhe auf die Grundseite $\overline{BF}$ einzeichnen. Beachten Sie auch, dass $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt, weil ABCD ein Quadrat ist.*

Berechnung der Länge $\overline{EF}$:

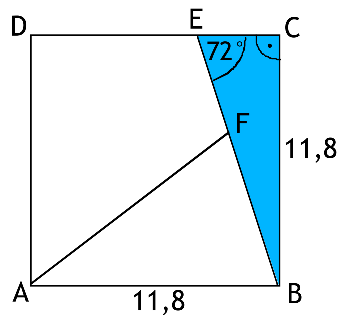
Für die Länge $\overline{EF}$ gilt: $\overline{EF} = \overline{BE} - \overline{BF}$

→ Berechnung der Länge $\overline{BE}$:

Für $\overline{BE}$ gilt im Dreieck BCE (siehe Figur 1):

$$\sin 72° = \frac{11{,}8}{\overline{BE}} \quad | \cdot \overline{BE} \quad | : \sin 72°$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BE} = \frac{11{,}8}{\sin 72°} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BE} = \underline{12{,}41 \text{ cm}}$$

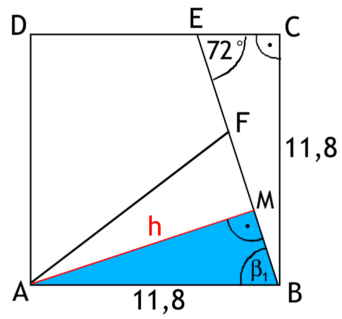


Figur 1

→ Berechnung der Länge $\overline{BF}$:

Zur Berechnung der Länge $\overline{BF}$ muss man zuerst die Höhe h des gleichschenkligen Dreiecks ABF einzeichnen und beachten, dass die Höhe h die Grundseite $\overline{BF}$ halbiert: $\overline{BM} = 0{,}5 \cdot \overline{BF}$. Im Dreieck ABM der Figur 2 gilt dann:

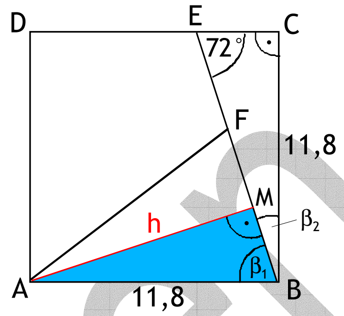
$$\cos \beta_1 = \frac{0{,}5 \cdot \overline{BF}}{11{,}8}$$



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich

Da der Winkel β_1 ein Wechselwinkel zu $\varepsilon = 72^\circ$ ist, gilt: $\beta_1 = 72^\circ$.
(Hinweis: β_1 kann auch mit $\beta_1 = 90^\circ - \beta_2$ berechnet werden. Den Winkel β_2 erhält man aus der Summe der Innenwinkel in Dreieck BCE: $\beta_1 = 18^\circ$.)



Figur 3

Mit $\beta_1 = 72^\circ$ folgt für $\cos\beta_1 = \dfrac{0{,}5\cdot\overline{BF}}{11{,}8}$:

$$\cos 72^\circ = \frac{0{,}5\cdot\overline{BF}}{11{,}8} \quad |\cdot 11{,}8 \quad |:0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad 7{,}29 = \overline{BF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BF} = \underline{7{,}29\text{ cm}}$$

Für die Länge $\overline{EF} = \overline{BE} - \overline{BF}$ folgt mit $\overline{BE} = 12{,}41$ cm und $\overline{BF} = 7{,}29$ cm:

$\overline{EF} = 12{,}41\text{ cm} - 7{,}29\text{ cm} = 5{,}12\text{ cm}$

Ergebnis: Die Länge der Strecke $\overline{EF}$ beträgt $\mathbf{\overline{EF} = 5{,}12}$ **cm.**

Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:

Die Oberfläche O_{zus} des zusammengesetzten Körpers setzt sich aus dem Mantel der Pyramide und der Oberfläche des halben Zylinders zusammen (ohne die quadratische Kontaktfläche).

Es gilt also (siehe Formelsammlung): $O_{zus} = 2a\cdot h_s + \frac{1}{2}\cdot(2\pi\cdot r^2 + 2\pi\cdot r\cdot h) = 2a\cdot h_s + \pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot h$

Darin ist a die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche, h_s ist die Höhe eines Seitendreiecks der Pyramide, r ist der Radius des Halbkreises des Halbzylinders und h ist die Höhe des Halbzylinders. Für r und h gilt (siehe Figur 1): $r = 0{,}5a$ und $h = a$.

Zur Berechnung der Oberfläche O_{zus} des zusammengesetzten Körpers benötigt man also die Seitenlänge a und die Höhe h_s. Diese beiden Größen können mit den angegebenen Größen $h_p = 16{,}0$ cm und $\varepsilon = 58{,}0^\circ$ berechnet werden (siehe Figur 1 und 2).

Berechnung der Oberfläche O_{zus} des zusammengesetzten Körpers:

Für die Oberfläche O_{zus} des zusammengesetzten Körpers gilt: $O_{zus} = M_{Pyr} + O_{HZyl}$

Für die Mantelfläche M_{Pyr} der Pyramide gilt (siehe Formelsammlung): $M_{Pyr} = 2a\cdot h_s$

Für die Oberfläche O_{HZyl} des Halbzylinders gilt (siehe Formelsammlung): $O_{HZyl} = \frac{1}{2}\cdot(2\pi\cdot r^2 + 2\pi\cdot r\cdot h) = \pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot h$

Damit ist $O_{zus} = 2a\cdot h_s + \pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot h$. Mit $r = 0{,}5a$ und $h = a$ erhält man:

$O_{zus} = 2a\cdot h_s + \pi\cdot(0{,}5a)^2 + \pi\cdot(0{,}5a)\cdot a = 2a\cdot h_s + \pi\cdot 0{,}25a^2 + \pi\cdot 0{,}5a^2$

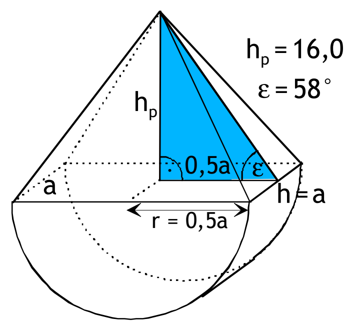
→ Berechnung der Länge a:

Im markierten Dreieck der Figur 1 gilt mit $h_p = 16$ und $\varepsilon = 58^\circ$:

$$\tan 58^\circ = \frac{16}{0{,}5a} \quad |\cdot 0{,}5a \quad |:\tan 58^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}5a = 10{,}0 \quad |:0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{a = 20{,}0\text{ cm}}$$



Figur 1

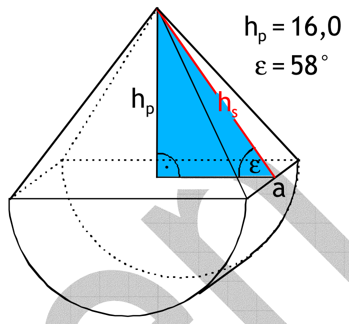
Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich

→ Berechnung der Seitenhöhe h_s:

Im markierten Dreieck der Figur 2 gilt mit $h_p = 16$ und $\varepsilon = 58°$:

$$\sin 58° = \frac{16}{h_s} \quad | \cdot h_s \quad | : \sin 58°$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{h_s = 18{,}87\text{ cm}}$$



Figur 2

Mit $a = 20{,}0\,\text{cm}$ und $h_s = 18{,}87$ cm folgt für $O_{zus} = 2a \cdot h_s + \pi \cdot 0{,}25a^2 + \pi \cdot 0{,}5a^2$:

$O_{zus} = 754{,}8\text{ cm}^2 + 942{,}5\text{ cm}^2 = \mathbf{1697{,}3\text{ cm}^2}$

Ergebnis: Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $\underline{O_{zus} = \mathbf{1697{,}3\text{ cm}^2}}$.

Aufgabe P4:

Überprüfung der Aussage P(AS = 6) > P(AS = 9):

Bei folgenden Ereignissen ist die Augensumme AS = 6: (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)

Darin steht die erste Zahl für die Augenzahl des ersten Würfels und die zweite Zahl für die Augenzahl des zweiten Würfels.

Die Ereignisse, bei denen die Augensumme AS = 9 ist, sind: (3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3)

Da jede Augenzahl bei einem idealen Würfel die gleiche Wahrscheinlichkeit hat - nämlich $p = \frac{1}{6}$, hat jedes der obigen Ereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Mit der Summenregel folgt: $\mathbf{P(AS = 6)} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \approx \mathbf{13{,}9\ \%}$ und

$\mathbf{P(AS = 9)} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} \approx \mathbf{11{,}1\ \%}$

Die Aussage **P(AS = 6) > P(AS = 9) ist also richtig**.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nele mit dem nächsten Wurf gewinnt:

Nele gewinnt dann, wenn die Augensumme (AS) ihres Wurfs größer als 8 ist; also bei AS = 9; 10; 11 oder 12.

Die Wahrscheinlichkeiten für diese Augensummen sind:

$P(AS = 9) = \frac{4}{36}$ (siehe oben)

$P(AS = 10) = P(4;6) + P(5;5) + P(6;4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$

$P(AS = 11) = P(5;6) + P(6;5) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$

$P(AS = 12) = P(6;6) = \frac{1}{36}$

Mit der Summenregel erhält man:

$\mathbf{P(Nele\ gewinnt)} = P(AS = 9) + P(AS = 10) + P(AS = 11) + P(AS = 12) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \mathbf{\frac{10}{36}} \approx \mathbf{27{,}8\ \%}$

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nele mit dem nächsten Wurf das Spiel gewinnt, beträgt $\mathbf{\frac{10}{36}} \approx \mathbf{27{,}8\ \%}$.