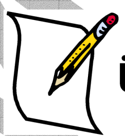
Trigonometrie:

Inhalt:

Die vorliegenden Folienvorlagen enthalten folgende Elemente:

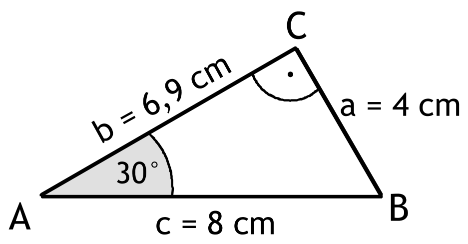
 **Beispiel:**	Anhand von Beispielen werden neue Regeln, Definitionen und Kenntnisse eingeführt. Die Aufgaben in den Beispielen sind meist so gestellt, dass sie von den Schülerinnen und Schülern auch selbstständig bearbeitet werden können.
Merke: 	Die *„Merkekästen“* stehen meist im Anschluss an ein einführendes Beispiel und fassen wichtige Regeln, Definitionen und Kenntnisse zusammen. Sie sollten von den Schülerinnen und Schülern unbedingt abgeschrieben werden.
 **Übung:**	Hier können die Schülerinnen und Schüler die gelernten Regeln und Kenntnisse üben und festigen. Im Anschluss an die Übungsaufgaben finden Sie jeweils die ausführlichen Lösungen dazu.

1. Seiten und Winkel in rechtwinkligen Dreiecken

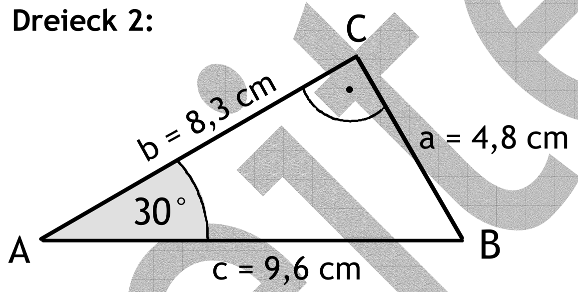
Beispiel:

a) Übertrage die beiden Dreiecke ins Heft und bestimme die folgenden Seitenverhältnisse (runde auf zwei Dezimalen). Was fällt auf ?

Dreieck 1:



Dreieck 2:



Seitenverhältnis:	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}$
Dreieck 1:			
Dreieck 2:			

b) Überprüfe deine Vermutung an zwei unterschiedlich großen rechtwinkligen Dreiecken mit $\alpha = 50^\circ$.

Lösung:

a)

Seitenverhältnis:	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}$
Dreieck 1:	0,5	0,86	0,58
Dreieck 2:	0,5	0,86	0,58

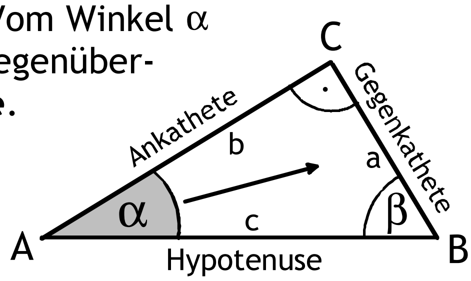
b) Die entsprechenden Seitenverhältnisse sind gleich groß und hängen nur vom Winkel ab, aber nicht von der Länge der Dreieckseiten.

Für rechtwinklige Dreiecke mit $\alpha = 50^\circ$ ergibt sich ebenfalls unabhängig von der Größe des Dreiecks:

Seitenverhältnis:	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}$
Bei $\alpha = 50^\circ$:	0,77	0,64	1,19

Merke:

In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die längste Seite als **Hypotenuse**. Die Seiten, die den rechten Winkel aufspannen, sind die Katheten. Vom Winkel α aus betrachtet, nennt man die gegenüberliegende Seite die **Gegenkathete**. Die am Winkel α anliegende Kathete heißt **Ankathete**. Vom Winkel β aus gesehen ist die Seite b die Gegenkathete und die Seite a die Ankathete.



Die Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck hängen nur von den Winkeln α und β ab. Sie können mit den **Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens** berechnet werden. Es gilt:

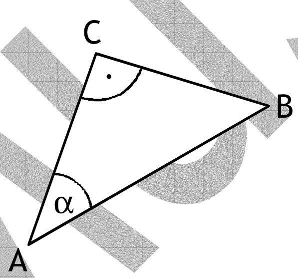
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\ ; \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\ ; \quad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Entsprechendes gilt für die Winkelfunktionen $\sin\beta$, $\cos\beta$ und $\tan\beta$.

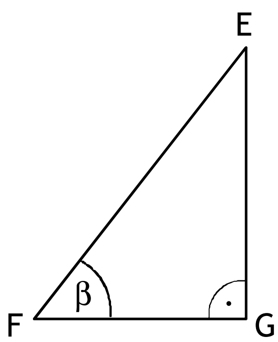
Übung 1:

Skizziere die Dreiecke ab und bezeichne die Seiten mit den Begriffen *Hypotenuse*, *Gegenkathete* und *Ankathete*. Betrachte die Seiten vom eingetragenen Winkel aus.

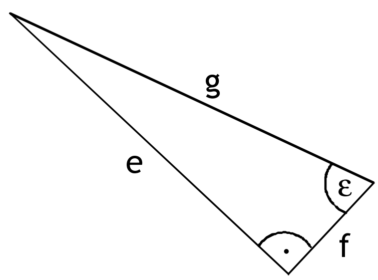
Dreieck 1:



Dreieck 2:



Dreieck 3:



Lösung:

Dreieck 1: BC = Gegenkathete, AC = Ankathete, AB = Hypotenuse

Dreieck 2: EG = Gegenkathete, FG = Ankathete, EF = Hypotenuse

Dreieck 3: e = Gegenkathete, f = Ankathete, g = Hypotenuse

Übung 2:

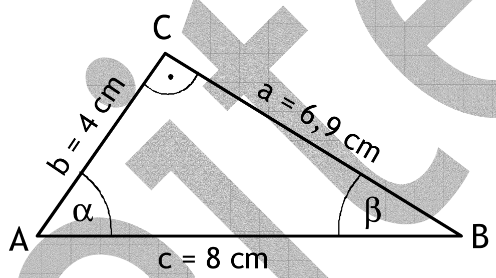
Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$, $\alpha = 60°$ und b = 4 cm.
Messe die fehlenden Seitenlängen und bestimme die Werte von sin α, sin β, cos α, cos β, tan α und tan β.

Lösung:

$\sin\alpha = \frac{6{,}9}{8} = 0{,}86$; $\sin\beta = \frac{4}{8} = 0{,}5$

$\cos\alpha = \frac{4}{8} = 0{,}5$; $\cos\beta = \frac{6{,}9}{8} = 0{,}86$

$\tan\alpha = \frac{6{,}9}{4} = 1{,}725$; $\tan\beta = \frac{4}{6{,}9} = 0{,}58$



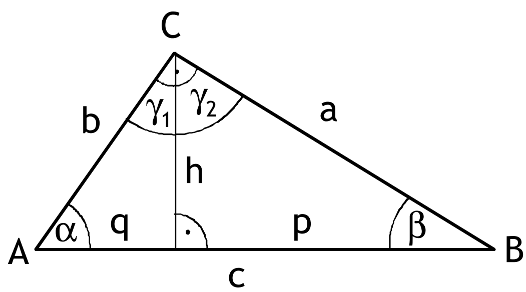
Übung 3:

Zeichne das rechtwinklige Dreieck ab und ergänze die Lücken:

$\sin\alpha = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$; $\cos\beta = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

$\sin\gamma_1 = \frac{\quad}{\quad}$; $\tan\gamma_2 = \frac{\quad}{\quad}$

$\frac{h}{b} = \_\_\_ = \_\_\_$; $\frac{p}{a} = \_\_\_ = \_\_\_$



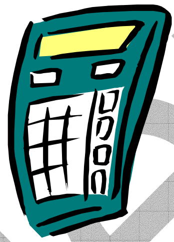
Lösung:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{h}{b}$; $\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{p}{a}$; $\sin\gamma_1 = \frac{q}{b}$;

$\tan\gamma_2 = \frac{p}{h}$; $\frac{h}{b} = \sin\alpha = \cos\gamma_1$; $\frac{p}{a} = \cos\beta = \sin\gamma_2$

2. Bedienen des Taschenrechners

Beispiel 1:



Berechne mit dem Taschenrechner den Wert von sin 30°.

Achte darauf, dass der Taschenrechner auf das Gradmaß „***degree***“ eingestellt ist !

Lösung:

Je nach Taschenrechnertyp berechnet man den Wert einer Winkelfunktion mit der Tastenfolge:

Typ 1: $\boxed{\text{sin}} \longrightarrow 30 \longrightarrow \boxed{=}$ Typ 2: $30 \longrightarrow \boxed{\text{sin}} \longrightarrow \boxed{=}$

Man erhält: **sin 30° = 0,5**

Übung 1:

Berechne mit dem Taschenrechner folgende Werte (runde auf 3 Dezimalen):

a) cos 45°	b) sin 60°	c) tan 20°
d) sin 10°	e) cos 90°	f) tan 45°
g) sin 0°	h) sin 90°	i) cos 0°

Lösung:

a) cos 45° = 0707	b) sin 60° = 0,866	c) tan 20° = 0,364
d) sin 10° = 0,174	e) cos 90° = 0	f) tan 45° = 1
g) sin 0° = 0	h) sin 90° = 1	i) cos 0° = 1

Beispiel 2:

Berechne mit dem Taschenrechner aus $\cos \alpha = 0{,}5$ den Winkel α.

Achte darauf, dass der Taschenrechner auf das Gradmaß „***degree***“ eingestellt ist !

Lösung:

Aus dem Wert einer Winkelfunktion berechnet man den entsprechenden Winkel (je nach Taschenrechnertyp) mit der Tastenfolge:

Typ 1: $\boxed{\text{sec}} \longrightarrow \boxed{\text{cos}} \longrightarrow 0{,}5 \longrightarrow \boxed{=}$

Typ 2: $0{,}5 \longrightarrow \boxed{\text{sec}} \longrightarrow \boxed{\text{cos}} \longrightarrow \boxed{=}$

Aus $\cos \alpha = 0{,}5$ erhält man: $\boldsymbol{\alpha = 60^\circ}$

Beachte: Die „sec”-Taste heißt auf manchen Taschenrechnern auch „shift”.

Übung 2:

Berechne mit dem Taschenrechner den gesuchten Winkel (runde auf 1 Dezimale):

a) $\cos \alpha = 0{,}707$	b) $\sin \beta = 0{,}866$	c) $\tan \varepsilon = 0{,}577$
d) $\sin \beta = 0{,}35$	e) $\cos \varepsilon = 0{,}925$	f) $\tan \delta = 1{,}5$
g) $\cos \alpha = 1$	h) $\sin \delta = 1$	i) $\cos \beta = 0$

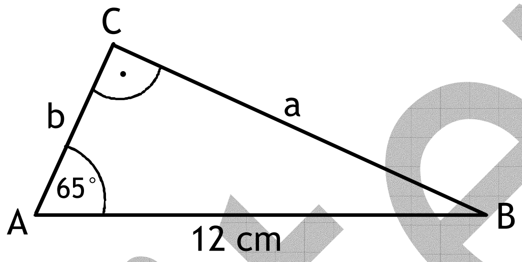
Lösung:

a) $\alpha = 45{,}0^\circ$	b) $\beta = 60{,}0^\circ$	c) $\varepsilon = 30^\circ$
d) $\beta = 20{,}5^\circ$	e) $\varepsilon = 22{,}3^\circ$	f) $\delta = 56{,}3^\circ$
g) $\alpha = 0^\circ$	h) $\delta = 90^\circ$	i) $\beta = 90^\circ$

3. Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken

Beispiel 1:

Skizziere das rechtwinklige Dreieck ab und berechne mithilfe geeigneter Winkelfunktionen die Längen der Seiten a und b.



Lösung:

Von $\alpha = 65^\circ$ aus betrachtet ist die Seite a die Gegenkathete und die Seite b die Ankathete.

Für die Seite a gilt:

$$\sin 65^\circ = \frac{a}{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}906 = \frac{a}{12} \quad | \cdot 12$$

$\Leftrightarrow$ 10,88 cm = a bzw. **a = 10,88 cm**

Für die Seite b gilt:

$$\cos 65^\circ = \frac{b}{12}$$

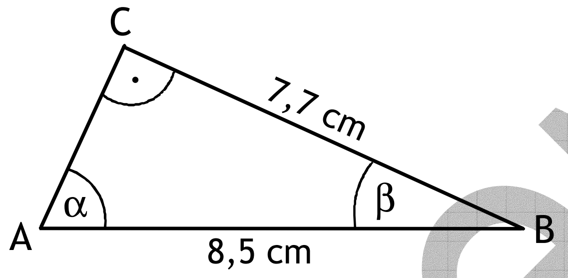
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}423 = \frac{b}{12} \quad | \cdot 12$$

$\Leftrightarrow$ 5,07 cm = b bzw. **b = 5,07 cm**

Beispiel 2:

Skizziere das rechtwinklige Dreieck ab und berechne mithilfe einer geeigneten Winkelfunktion den Winkel β.

Was folgt damit für den Winkel α ?



Lösung:

Im Dreieck ABC gilt:

$$\cos\beta = \frac{7{,}7}{8{,}5} = 0{,}906 \Rightarrow \ \boldsymbol{\beta = 25^\circ}$$

Da in jedem Dreieck die Summe der Innenwinkel 180° ergibt, kann man den Winkel α mit $\beta = 25^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$ berechnen. Es gilt:

$$\alpha + 25^\circ + 90^\circ = 180^\circ \quad | \ -90^\circ - 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 65^\circ}$$

Merke:

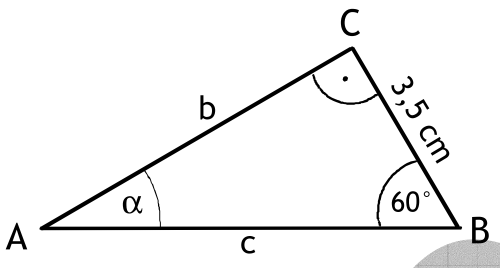
1. Kennt man in einem rechtwinkligen Dreieck außer dem rechten Winkel noch einen weiteren **Winkel und eine Seitenlänge**, berechnet man die fehlenden Seitenlängen so:
Man stellt zuerst mit Sinus, Kosinus oder Tangens und den bekannten Größen eine Gleichung auf, in der nur eine unbekannte Variable vorkommt. Anschließend löst man diese Gleichung nach der unbekannten Variablen auf.

2. Kennt man in einem rechtwinkligen Dreieck einen der beiden **spitzen Winkel**, kann man den fehlenden Innenwinkel mit der Summe der Innenwinkel berechnen.
Ist $\gamma = 90^\circ$, dann gilt: $\alpha = 90^\circ - \beta$ bzw. $\beta = 90^\circ - \alpha$

3. Kennt man in einem rechtwinkligen Dreieck **zwei Seitenlängen**, kann man die dritte Seitenlänge auch mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

Übung 1:

Berechne mithilfe geeigneter Winkelfunktionen die Längen der Seiten b und c und den Winkel α. Überprüfe deine Rechnung, indem du das Dreieck konstruierst.



Lösung:

Für c gilt:

$$\cos 60^\circ = \frac{3{,}5}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}5 = \frac{3{,}5}{c} \quad | \cdot c$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}5\,c = 3{,}5 \quad | :0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{c = 7\ cm}$$

Für b gilt:

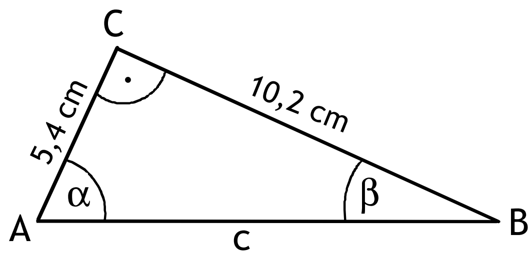
$$\tan 60^\circ = \frac{b}{3{,}5} \quad | \cdot 3{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad 6{,}06 = b \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b = 6{,}06\ cm}$$

Für den Winkel α gilt: $\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Übung 2:

Berechne mit den angegebenen Seitenlängen die Winkel α und β.
Überprüfe deine Rechnung, indem du das Dreieck konstruierst.



Lösung:

Im Dreieck ABC gilt: $\tan \alpha = \frac{10{,}2}{5{,}4} = 1{,}89 \Rightarrow \mathbf{\alpha = 62{,}1^\circ}$

Damit ist β = **27,9°** (= 90° – 62,1°)

Die Hypotenuse c kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$c^2 = (5{,}4\,\text{cm})^2 + (10{,}2\,\text{cm})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 = 133{,}2\ \text{cm}^2 \quad | \sqrt{\ }$$

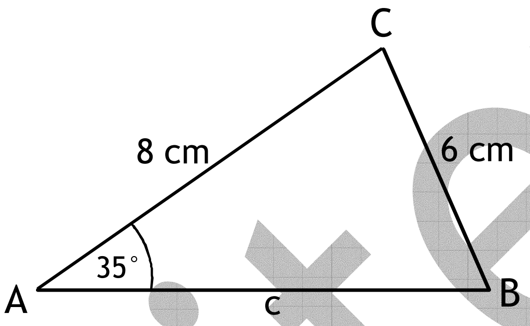
$$\Rightarrow \quad \mathbf{c = 11{,}54\ cm}$$

4. Berechnungen in allgemeinen Dreiecken

Beispiel 1:

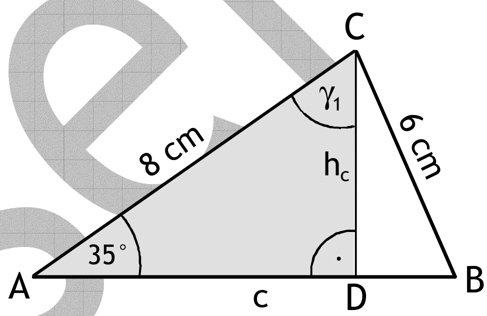
a) Skizziere das Dreieck ab und zeichne die Höhe h_c ein. Berechne dann die Länge der Seite c und die fehlenden Innenwinkel des Dreiecks ABC.

b) Warum gelingt die Berechnung nicht mit den Höhen h_a und h_b ?



Lösung:

a) Mit der Höhe h_c entsteht das rechtwinklige **Dreieck ADC**, in dem ein Winkel (35°) und eine Seite (8 cm) bekannt sind.



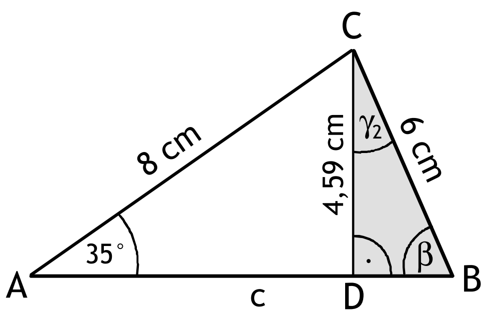
Es gilt: $\cos 35° = \frac{\overline{AD}}{8} \;\Rightarrow\; \mathbf{\overline{AD} = 6{,}55\ cm}$

$\sin 35° = \frac{h_c}{8} \;\Rightarrow\; \mathbf{h_c = 4{,}59\ cm}$

Da die Summe der Innenwinkel in ADC 180° sein muss, folgt für γ_1:

$\gamma_1 = 180° - 35° - 90° = \mathbf{55°}$.

Nun kennt man auch im rechtwinkligen **Dreieck DBC** zwei Seiten: $h_c = 4{,}59$ cm und $\overline{BC} = 6$ cm



Die Seite $\overline{DB}$ kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

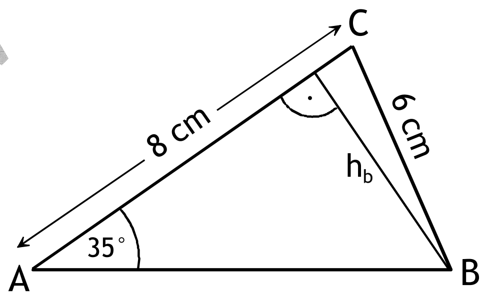
Es gilt: $(4{,}59\ \text{cm})^2 + \overline{DB}^2 = (6\ \text{cm})^2 \;\Rightarrow\; \mathbf{\overline{DB} = 3{,}86\ cm}$

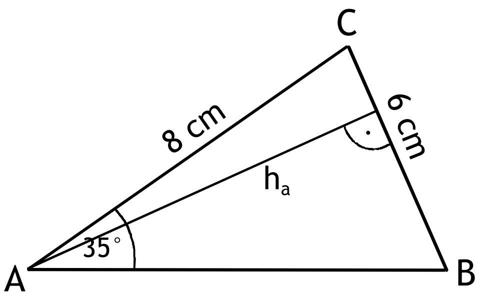
Für den Winkel γ_2 gilt: $\cos \gamma_2 = \frac{4{,}59}{6} \;\Rightarrow\; \mathbf{\gamma_2 = 40{,}1°}$

Mit $c = \overline{AD} + \overline{DB}$ und $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ erhält man schließlich: $\mathbf{c = 10{,}41\ cm}$ und $\mathbf{\gamma = 95{,}1°}$

Für den Winkel β gilt: $\beta = 180° - 90° - \gamma_2 = \mathbf{49{,}9°}$

b) Mit den Höhen h_a oder h_b entsteht kein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten und Winkel mit trigonometrischen Funktionen berechnet werden können.

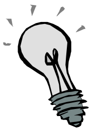




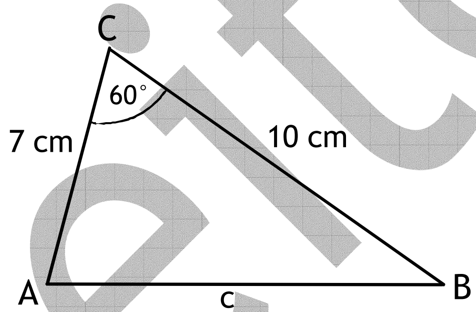
Merke:

Zur Berechnung fehlender Strecken und Winkel in allgemeinen Dreiecken muss man eine geeignete Höhe des Dreiecks einzeichnen.

Eine Höhe des Dreiecks ist nur dann geeignet, wenn mit dieser Höhe ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, von dem ein spitzer Winkel und eine Seite bekannt sind.

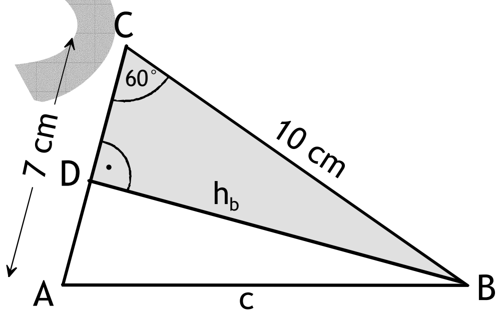


Beispiel 2:



Zeichne das Dreieck ab. Trage eine geeignete Höhe ein und berechne die Länge der Seite c und die fehlenden Innenwinkel des Dreiecks ABC.

Lösung:



Mit der Höhe h_b erhält man das Dreieck BCD, in dem alle fehlenden Seiten und Winkel berechnet werden können. Es gilt:

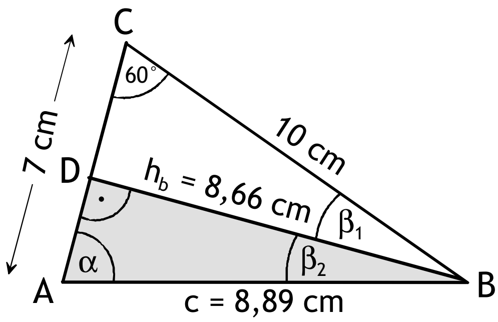
$\sin 60° = \frac{h_b}{10} \Rightarrow$ $\mathbf{h_b = 8{,}66\ cm}$

$\cos 60° = \frac{\overline{CD}}{10} \Rightarrow$ $\mathbf{\overline{CD} = 5{,}0\ cm}$

Mit $\overline{AD} = 7\text{ cm} - \overline{CD}$ erhält man: $\mathbf{\overline{AD} = 2\ cm}$

Die Strecke c kann im Dreieck ABD mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Es gilt: $c^2 = (h_b)^2 + \overline{AD}^2 \Rightarrow$ $\mathbf{c = 8{,}89\ cm}$



Für den Winkel α gilt im Dreieck ABD:

$\sin \alpha = \frac{8{,}66}{8{,}89} = 0{,}974 \Rightarrow$ $\mathbf{\alpha = 76{,}9°}$

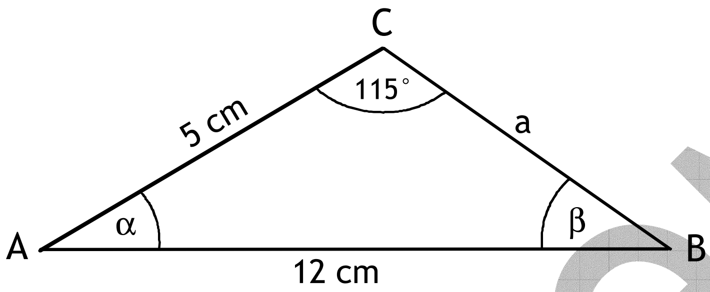
Den Winkel β_1 erhält man aus der Summe der Innenwinkel im Dreieck BCD: $\beta_1 = 30°$

Mit $\alpha = 76{,}9°$ folgt für den Winkel β_2 aus der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABD: $\beta_2 = 13{,}1°$

Damit ist $\mathbf{\beta = \beta_1 + \beta_2 = 43{,}1°}$.

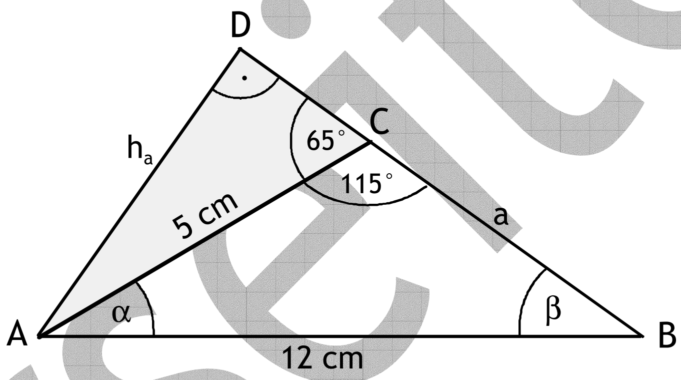
Übung:

Zeichne das Dreieck ab. Trage eine geeignete Höhe ein und berechne die Länge der Seite a und die fehlenden Innenwinkel des Dreiecks ABC.



Lösung:

Mit der Höhe h_a erhält man das rechtwinklige Dreieck ACD, in dem alle fehlenden Seiten und Winkel berechnet werden können. Es gilt:

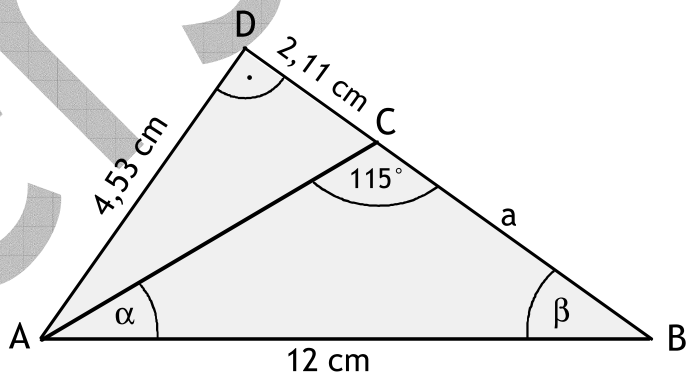


$\sin 65^\circ = \frac{h_a}{5} \Rightarrow \mathbf{h_a = 4{,}53\ cm}$

$\cos 65^\circ = \frac{\overline{CD}}{5} \Rightarrow \mathbf{\overline{CD} = 2{,}11\ cm}$

Die Strecke a und der Winkel β können nun im (großen) Dreieck ABD berechnet werden.

Es gilt:



$\sin\beta = \frac{4{,}53}{12} = 0{,}3775 \Rightarrow \mathbf{\beta = 22{,}2^\circ}$

Für die Strecke a gilt: $a = \overline{BD} - 2{,}11\,\text{cm}$

Die Strecke $\overline{BD}$ kann im Dreieck ABD mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Es gilt: $(12\ \text{cm})^2 = (4{,}53\ \text{cm})^2 + \overline{BD}^2$

$\Rightarrow \mathbf{\overline{BD} = 11{,}11\ cm}$

Damit erhält man: **a = 9 cm** (= 11,11 cm – 2,11 cm)

Für den Winkel α gilt:

$\alpha + 22{,}2^\circ + 115^\circ = 180^\circ$ (Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC)

$\Rightarrow \mathbf{\alpha = 42{,}8^\circ}$

5. Berechnungen in Vielecken

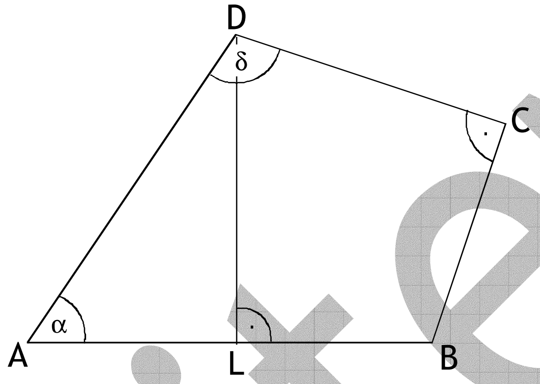
Beispiel:

Vom Viereck ABCD sind bekannt:

$\overline{BC} = 5{,}0$ cm; $\overline{CD} = 7{,}3$ cm;

$\alpha = 54{,}0^\circ$ und $\delta = 110{,}0^\circ$

Berechne die Strecke $\overline{DL}$.



Lösung:

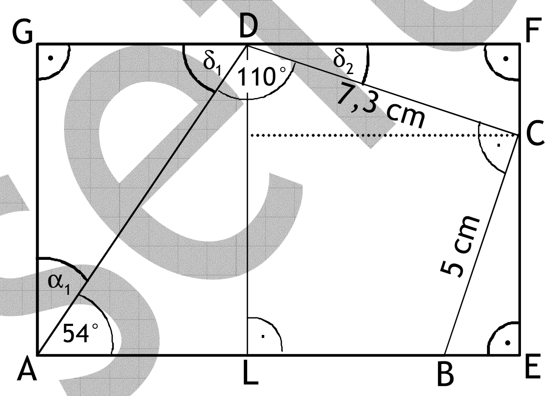
Wenn man ein Rechteck um das Viereck ABCD legt, entstehen rechtwinklige Dreiecke.

Für den Winkel α_1 gilt: $\boldsymbol{\alpha_1 = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ}$

Für die Summe der Innenwinkel im Dreieck ADG gilt:

$\boldsymbol{36^\circ + \delta_1 + 90^\circ = 180^\circ \;\Leftrightarrow\; \delta_1 = 54^\circ}$

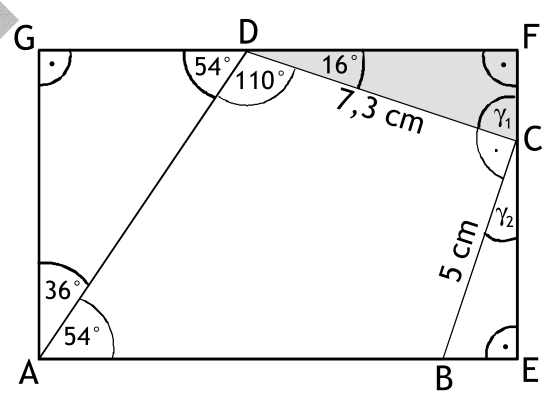
Außerdem gilt: $\delta_1 + 110^\circ + \delta_2 = 180^\circ \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\delta_2 = 16^\circ}$



Da nun im Dreieck CFD ein Winkel und eine Seite bekannt sind, können die Strecken $\overline{CF}$ und $\overline{DF}$ berechnet werden.

Es gilt: $\sin 16^\circ = \dfrac{\overline{CF}}{7{,}3} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\overline{CF} = 2{,}01\text{ cm}}$

$\cos 16^\circ = \dfrac{\overline{DF}}{7{,}3} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\overline{DF} = 7{,}02\text{ cm}}$



Den Winkel γ_1 berechnet man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck CFD.

Man erhält: $\boldsymbol{\gamma_1 = 74^\circ}$

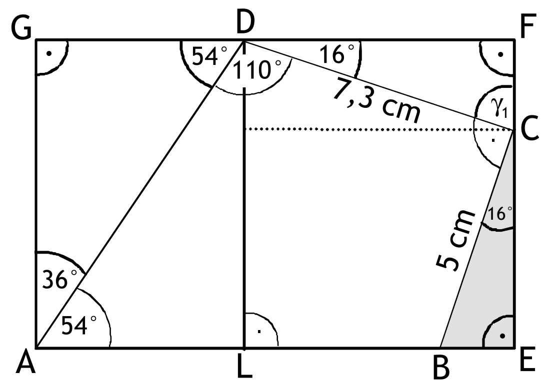
Damit kann auch der Winkel $\gamma_2 = 180^\circ - 90^\circ - \gamma_1$ sofort berechnet werden: $\boldsymbol{\gamma_2 = 16^\circ}$

Da nun im rechtwinkligen Dreieck BEC ein spitzer Winkel und eine Seite bekannt sind, kann die Strecke $\overline{CE}$ berechnet werden.

Es gilt: $\cos 16^\circ = \dfrac{\overline{CE}}{5} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\overline{CE} = 4{,}81\text{ cm}}$

Somit erhält man für $\overline{DL} = \overline{CE} + \overline{CF}$:

$\boldsymbol{\overline{DL} = 6{,}82\text{ cm}}$



Merke: Zur Berechnung von Strecken und Winkeln in Vielecken muss man meistens Hilfslinien einzeichnen; und zwar so, dass rechtwinklige Dreiecke entstehen.
In denjenigen rechtwinkligen Dreiecken, in denen (außer dem rechten Winkel) zwei Größen bekannt sind, können dann alle fehlende Seiten und Winkel berechnet werden.

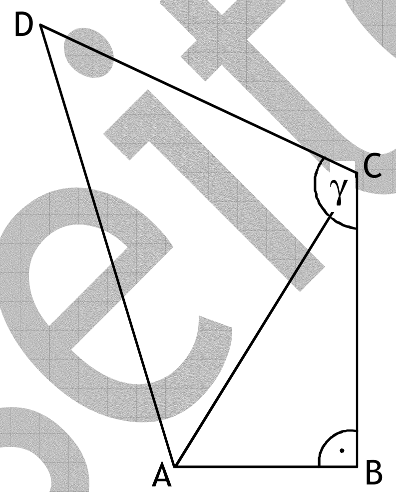
Übung:

Von der Figur ABCD sind bekannt:

$\overline{AB} = 4{,}5$ cm; $\overline{BC} = 5{,}9$ cm;

$\gamma = 107{,}3^\circ$ und $\overline{AC} = \overline{CD}$

Berechne den Abstand des Punktes C von AD.



Lösung:

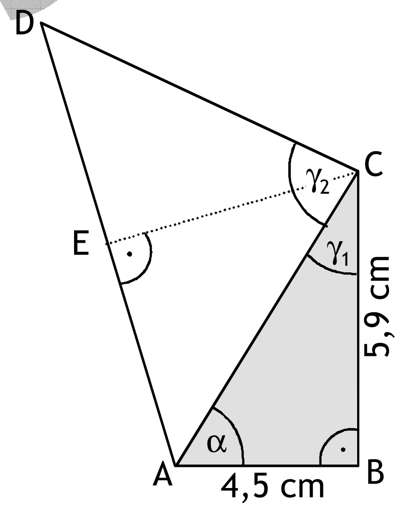
Mit $\overline{AB} = 4{,}5$ cm und $\overline{BC} = 5{,}9$ cm können im rechtwinkligen Dreieck ABC der Winkel γ_1 und die Strecke $\overline{AC}$ berechnet werden. Es gilt:

$$\tan \gamma_1 = \frac{4{,}5}{5{,}9} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma_1 = 37{,}3^\circ}$$

Aus $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 107{,}3^\circ$ folgt: $\boldsymbol{\gamma_2 = 70^\circ}$

Mit dem Satz des Pythagoras erhält man:

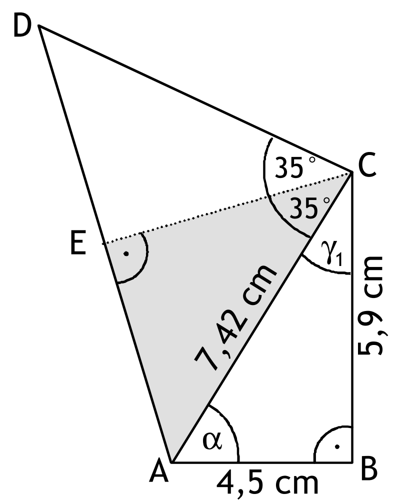
$\boldsymbol{\overline{AC} = 7{,}42}$ **cm**



Weil das Dreieck ACD gleichschenklig ist, wird der Winkel 70° von der Strecke $\overline{CE}$ halbiert.

Im rechtwinkligen Dreieck ACE kann nun mit der Kosinusfunktion die Strecke $\overline{CE}$ berechnet werden. Es gilt:

$$\cos 35^\circ = \frac{\overline{CE}}{7{,}42} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{CE} = 6{,}08\ \text{cm}}$$

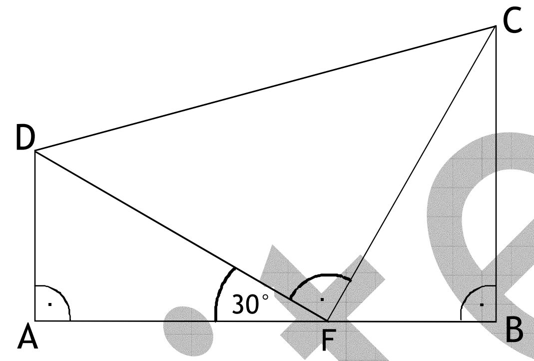


6. Berechnungen mit Parametern

Beispiel:

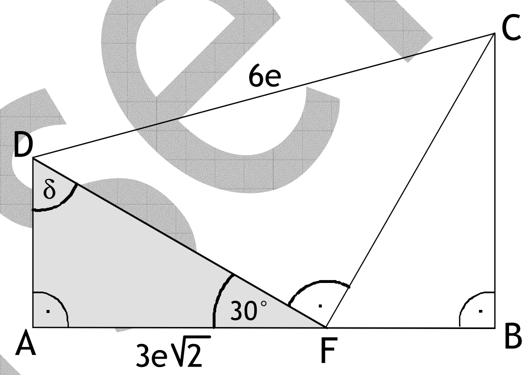
Im Viereck ABCD sind die Längen $\overline{AF} = 3e\sqrt{2}$ und $\overline{CD} = 6e$ bekannt.

Gib die Länge $\overline{BC}$ in Abhängigkeit von e an.



Lösung:

Im rechtwinkligen Dreieck AFD kann die Strecke $\overline{DF}$ berechnet werden. Es gilt:



$$\cos 30^\circ = \frac{3e\sqrt{2}}{\overline{DF}} \Leftrightarrow \overline{DF} = \frac{3e\sqrt{2}}{\cos 30^\circ}$$

Mit $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (siehe Formelsammlung) folgt:

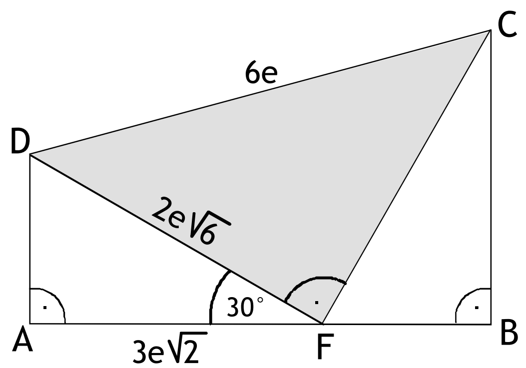
$$\overline{DF} = \frac{3e\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6e\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Rationalmachen des Nenners ergibt:

$$\overline{DF} = \frac{6e\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{6e\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6e\sqrt{6}}{3} = 2e\sqrt{6}$$

(Hinweis: Die Strecke $\overline{AD}$ und der Winkel δ werden für die weitere Berechnung nicht benötigt.)

Nun kann im rechtwinkligen Dreieck FCD die Strecke $\overline{FC}$ mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.



Es gilt: $(2e\sqrt{6})^2 + \overline{FC}^2 = (6e)^2$

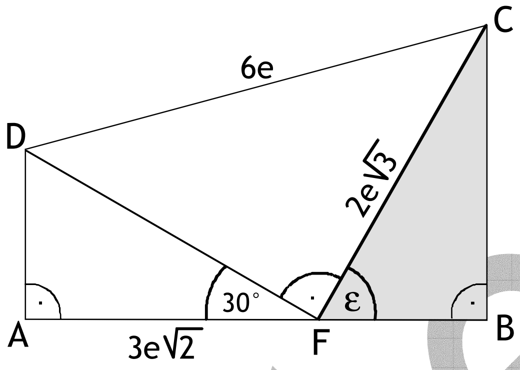
$$\Leftrightarrow \quad 4e^2\cdot 6 + \overline{FC}^2 = 36e^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 24e^2 + \overline{FC}^2 = 36e^2 \quad | -24e^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{FC}^2 = 12e^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{\overline{FC}} = e\sqrt{12} = \mathbf{2e\sqrt{3}}$$

Mit $\varepsilon = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ kann nun im rechtwinkligen Dreieck FBC die Strecke $\overline{BC}$ berechnet werden. Es gilt:



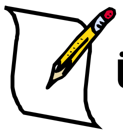
$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{2e\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{BC} = 2e\sqrt{3}\sin 60^\circ$$

Mit $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (siehe Formelsammlung) folgt:

$$\overline{BC} = 2e\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

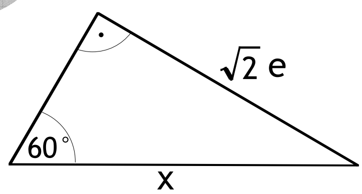
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\overline{BC} = 3e}$$

Merke: Bei Berechnungen mit einem Parameter (meistens e oder a) muss man den Parameter wie eine Zahl behandeln. Wichtige Umformungsschritte sind dabei das Auflösen von Doppelbrüchen und das Vereinfachen von Wurzeltermen.



Übung:

Berechne in folgendem Dreieck die Strecke x in Abhängigkeit von e.



Lösung:

Es gilt: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}e}{x} \quad | \cdot x$

$$\Leftrightarrow \quad x\cdot\sin 60^\circ = \sqrt{2}e \quad | :\sin 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}e}{\sin 60^\circ}$$

Mit $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt:

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}e}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}e\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2e\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2e\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{2e\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}$$

Exkurs: Rechnen mit Wurzeltermen

Das sollte man (noch) wissen:

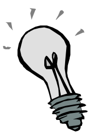
- wie man das Produkt zweier Wurzeln vereinfacht,
- wie man teilweise eine Wurzel zieht,
- wie man den Nenner eines Bruchs rational macht,
- wie man Doppelbrüche vereinfacht.

Merke: **Das Produkt zweier Wurzeln**

(1) $\sqrt{a}^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

(2) $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a} = a$

(3) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$



Beispiel 1:

Vereinfache soweit wie möglich:

a) $\sqrt{36e^2}$ b) $\left(e\sqrt{3}\right)^2$ c) $e\sqrt{3} \cdot e\sqrt{12}$ d) $\frac{e\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{e\sqrt{3}}{4}$

Lösung:

a) $\sqrt{36e^2} = \mathbf{6e}$

b) $\left(e\sqrt{3}\right)^2 = e\sqrt{3} \cdot e\sqrt{3} = e^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \mathbf{3e^2}$

c) $e\sqrt{3} \cdot e\sqrt{12} = e^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = e^2\sqrt{36} = \mathbf{6e^2}$

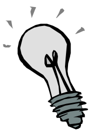
d) $\frac{e\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{e\sqrt{3}}{4} = \frac{e^2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 4} = \mathbf{\frac{e^2\sqrt{15}}{8}}$

Merke: 

Teilweises Wurzelziehen

Beim teilweisen Wurzelziehen muss man zuerst den Radikand in quadratische Faktoren zerlegen soweit möglich. Quadratische Faktoren können dann aus der Wurzel "herausgezogen" werden.

Es gilt: $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$



Beispiel 2:

Ziehe soweit wie möglich die Wurzel.

a) $e\sqrt{18}$ b) $e\sqrt{\frac{3}{4}}$ c) $\sqrt{32e^2}$ d) $3\sqrt{\frac{50e^2}{9}}$

Lösung:

a) $e\sqrt{18} = e\sqrt{2 \cdot 9} = \mathbf{3e\sqrt{2}}$

b) $e\sqrt{\frac{3}{4}} = \mathbf{\frac{e}{2}\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{32e^2} = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot e^2} = \mathbf{4e\sqrt{2}}$

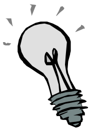
d) $3\sqrt{\frac{50e^2}{9}} = \frac{3}{3}\sqrt{2 \cdot 25e^2} = \mathbf{5e\sqrt{2}}$

Merke: 

Rationalmachen des Nenners

Kommt im Nenner eines Bruchs eine Wurzel vor, sollte man den Nenner rational machen; das heißt in einen wurzelfreien Nenner umwandeln. Dazu erweitert man den Bruch mit der Wurzel des Nenners:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$$



Beispiel 3: Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich.

a) $\frac{2e}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{6e}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{9e\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{2e^2}}{e\sqrt{8}}$

Lösung:

a) $\frac{2e}{\sqrt{3}} = \frac{2e\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{3}\,e}{3}}$

b) $\frac{6e}{\sqrt{2}} = \frac{6e\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{6e\cdot\sqrt{2}}{2} = \mathbf{3e\sqrt{2}}$

c) $\frac{9e\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{9e\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{9e\sqrt{6}}{2\cdot 3} = \mathbf{\frac{3e\sqrt{6}}{2}}$

d) $\frac{\sqrt{2e^2}}{e\sqrt{8}} = \frac{e\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}{e\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{16}}{8} = \frac{4}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

Merke: **Vereinfachen von Doppelbrüchen**

Doppelbrüche werden vereinfacht, indem man den Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Beispiel 4:

Vereinfache soweit wie möglich: a) $\frac{5e}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ b) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}e}{\frac{2}{5}e}$

Lösung:

a) $\frac{5e}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5e\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{10e}{\sqrt{2}} = \frac{10e\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{10e\sqrt{2}}{2} = \mathbf{5e\sqrt{2}}$

b) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}e}{\frac{2}{5}e} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{5}{2} = \mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{6}}$

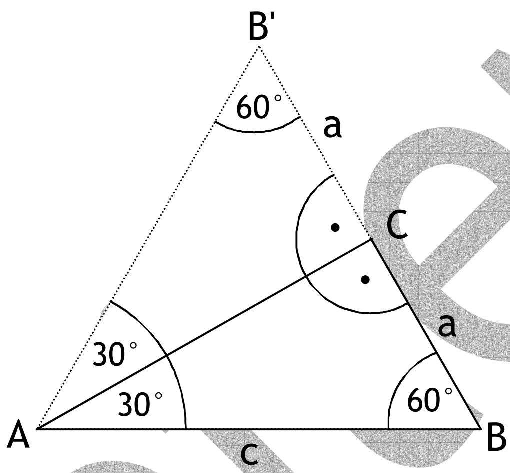
7. Besondere Werte von Sinus, Kosinus und Tangens

Beispiel 1:

a) Zeige anhand der Figur, dass gilt: **sin 30° = 0,5**

b) Was folgt aus sin 30° = 0,5 für cos 60°?

Tipp: Das Dreieck ABB' ist gleichseitig.



Lösung:

a)

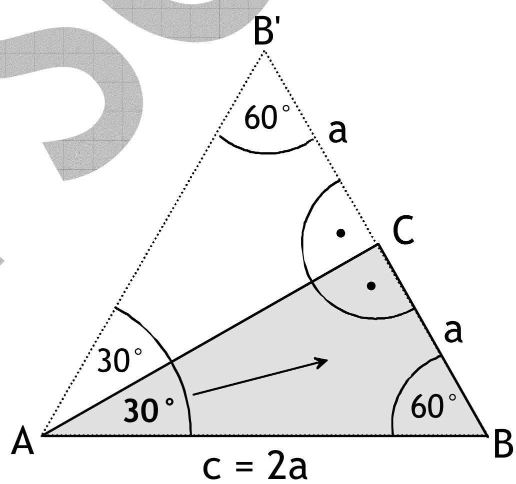
Im Dreieck ABC ist von 30° aus betrachtet die Seite a die Gegenkathete und die Seite c die Hypotenuse.

Es gilt also: $\sin 30° = \frac{a}{c}$

Da das Dreieck ABB' gleichseitig ist, ist c = 2a. Damit folgt:

$$\sin 30° = \frac{a}{2a}$$

$\Leftrightarrow$ **sin 30° = 0,5**



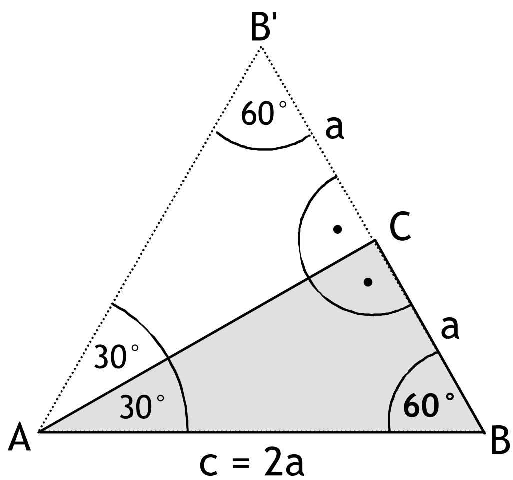
b)

Von β = 60° aus betrachtet gilt:

$$\cos 60° = \frac{a}{2a}$$

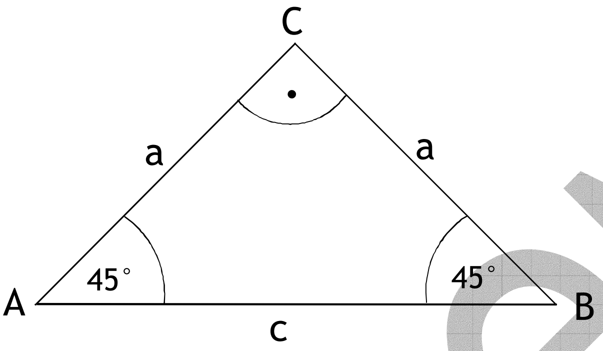
$\Leftrightarrow$ **cos 60° = 0,5**

Es ist also: cos 60° = sin 30°



Beispiel 2:

Ermittle mithilfe des gleichschenkligen Dreiecks die Werte für sin 45°, cos 45° und tan 45°.



Tipp:
Drücke zuerst mit dem Satz des Pythagoras die Seite c in Abhängigkeit von a aus.

Lösung:

Mit dem Satz des Pythagoras erhält man:

$$c^2 = a^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 = 2a^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \sqrt{2a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{c = a\sqrt{2}}$$

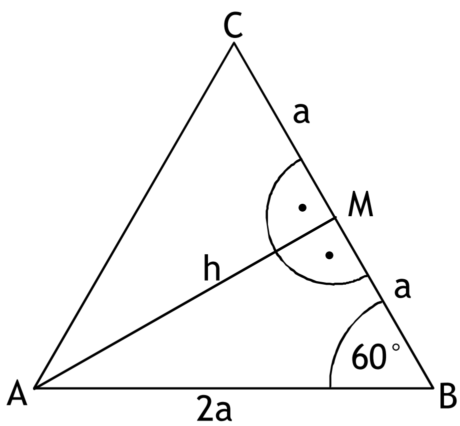
Im Dreieck ABC gilt:

$$\mathbf{sin\ 45°} = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\mathbf{cos\ 45°} = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\mathbf{tan\ 45°} = \frac{a}{a} = \mathbf{1}$$

Beispiel 3:



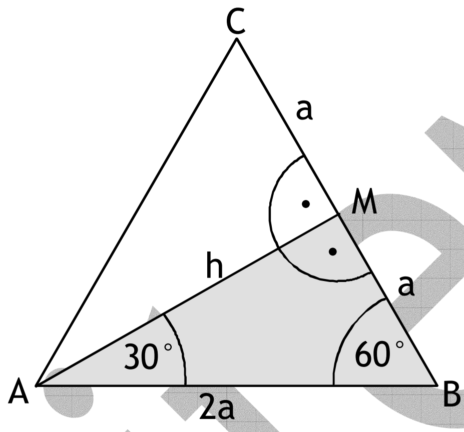
a) Ermittle mithilfe der Figur den Wert für sin 60°.

Tipp: Berechne zuerst die Höhe h in Abhängigkeit von a.

b) Was erhält man für die Werte von cos 30°, tan 60° und tan 30°?

Lösung:

a) Im Dreieck ABM gilt der Satz des Pythagoras:



$$(2a)^2 = h^2 + a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = h^2 + a^2 \qquad | -a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 3a^2 = h^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 3a^2 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{h = a\sqrt{3}}$$

Damit erhält man im Dreieck ABM:

$$\textbf{sin 60°} = \frac{h}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

b) Außerdem gilt im Dreieck ABM:

$$\textbf{cos 30°} = \frac{h}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\textbf{tan 60°} = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \mathbf{\sqrt{3}}$$

$$\textbf{tan 30°} = \frac{a}{h} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Übersicht:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Nicht definiert

1) Wie bezeichnet man die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ?

2) Worin unterscheiden sich Gegenkathete und Ankathete ?

3) Welche Begriffe gehören in die Lücken ?

$\sin\alpha = \frac{\square}{\square}$ $\cos\alpha = \frac{\square}{\square}$ $\tan\alpha = \frac{\square}{\square}$

4) Wie erhält man aus Gleichungen der Art $\sin\alpha = z$ mit dem Taschenrechner den Winkel α, wenn der Wert für z bekannt ist ?

5) Wie berechnet man aus zwei Innenwinkeln eines Dreiecks den dritten Innenwinkel ?

6) Wie berechnet man in einem rechtwinkligen Dreieck alle Seitenlängen und Innenwinkel, wenn ein spitzer Innenwinkel und eine Seitenlänge bekannt sind ?

7) Wie berechnet man in einem rechtwinkligen Dreieck alle Seitenlängen und Innenwinkel, wenn zwei Seitenlängen bekannt sind ?

8) Welche Hilfslinie muss man in allgemeinen Dreiecken einzeichnen, um aus zwei Seitenlängen und einem Innenwinkel die fehlenden Winkel und Seitenlängen berechnen zu können ?

9) Wie geht man vor, um in Vielecken fehlende Winkel und Strecken mithilfe der Trigonometrie berechnen zu können ? Beschreibe in Stichworten die prinzipielle Vorgehensweise.

10) Welche Terme gehören in die Lücken ?

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = \square$; $\sqrt{a^2} = \square$; $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \square$; $\sqrt{a^2\cdot b} = \square$.

11) Wie man macht einen Nenner rational ? Ergänze die Lücken: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \square = \square$

12) Wie vereinfacht man Doppelbrüche ?

Antworten zur Checkliste:

1) Hypotenuse, Gegenkathete und Ankathete

2) Die Gegenkathete ist die Kathete, die *gegenüber* einem Winkel liegt.
Die an einem Winkel *anliegende* Kathete ist die Ankathete.

3) $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

4) Je nach Taschenrechner mit der Tastenfolge:

Typ 1: $\boxed{\text{sec}} \rightarrow \boxed{\text{sin}} \rightarrow z \rightarrow \boxed{=}$ Typ 2: $z \rightarrow \boxed{\text{sec}} \rightarrow \boxed{\text{sin}} \rightarrow \boxed{=}$

5) Mit der Summe aller Innenwinkel: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

6) Man stellt zunächst mit Sinus, Kosinus oder Tangens und den bekannten Größen eine Gleichung auf, in der nur eine unbekannte Variable vorkommt. Anschließend löst man diese Gleichung.

7) Die dritte Seitenlänge kann man mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Die Innenwinkel berechnet man dann mit den Beziehungen von 3.

8) Man muss eine Höhe des Dreiecks einzeichnen; und zwar so, dass ein rechtwinkliges Teildreieck entsteht, in dem eine Seite und ein spitzer Innenwinkel bekannt sind.

9) Man muss (meistens) Hilfslinien einzeichnen, sodass rechtwinklige Dreiecke entstehen, in denen fehlenden Strecken und Winkel berechnet werden können.

10) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$; $\sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$; $\sqrt{a^2\cdot b} = a\cdot\sqrt{b}$

11) Man muss den Bruch mit der Wurzel des Nenners erweitern: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\cdot\sqrt{\mathbf{b}}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{\mathbf{b}}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

12) Indem man den Zähler mit dem Kehrbruch des Nenners multipliziert.

Antworten zur Checkliste:

1) Hypotenuse, Gegenkathete und Ankathete

2) Die Gegenkathete ist die Kathete, die *gegenüber* einem Winkel liegt.
Die an einem Winkel *anliegende* Kathete ist die Ankathete.

3) $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

4) Je nach Taschenrechner mit der Tastenfolge:

Typ 1: $\boxed{\text{sec}} \rightarrow \boxed{\text{sin}} \rightarrow z \rightarrow \boxed{=}$ Typ 2: $z \rightarrow \boxed{\text{sec}} \rightarrow \boxed{\text{sin}} \rightarrow \boxed{=}$

5) Mit der Summe aller Innenwinkel: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

6) Man stellt zunächst mit Sinus, Kosinus oder Tangens und den bekannten Größen eine Gleichung auf, in der nur eine unbekannte Variable vorkommt. Anschließend löst man diese Gleichung.

7) Die dritte Seitenlänge kann man mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Die Innenwinkel berechnet man dann mit den Beziehungen von 3.

8) Man muss eine Höhe des Dreiecks einzeichnen; und zwar so, dass ein rechtwinkliges Teildreieck entsteht, in dem eine Seite und ein spitzer Innenwinkel bekannt sind.

9) Man muss (meistens) Hilfslinien einzeichnen, sodass rechtwinklige Dreiecke entstehen, in denen fehlenden Strecken und Winkel berechnet werden können.

10) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$; $\sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$; $\sqrt{a^2\cdot b} = a\cdot\sqrt{b}$

11) Man muss den Bruch mit der Wurzel des Nenners erweitern: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\cdot\sqrt{\mathbf{b}}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{\mathbf{b}}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

12) Indem man den Zähler mit dem Kehrbruch des Nenners multipliziert.

Sehr geehrte Lehrerinnen und Lehrer,

mit diesen Folienvorlagen können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern effektiv und kräfteschonend das Thema „*Trigonometrie*“ vermitteln. Alle OHP-Folien sind so konzipiert, dass Ihnen aufwendige Erklärungen an der Tafel erspart bleiben.

Jedes Kapitel beginnt mit einem einführenden Beispiel, mit dessen Hilfe sich die Schüler/innen die jeweiligen Regeln und Kenntnisse selbstständig erarbeiten können. Wichtige mathematische Sätze und Zusammenfassungen sind in „*Merkekästen*“ hervorgehoben, die Ihre Schüler/innen direkt von der Folie abschreiben können. Im Anschluss daran folgen jeweils Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen, die ebenfalls von der Folie ins Schulheft übertragen werden können. Am Ende der Unterrichtseinheit finden Sie eine Checkliste, mit der die Schüler/innen den eigenen Kenntnisstand in kom-pakter Form überprüfen und wiederholen können.

Wie Sie nun die einzelnen Folien optimal im Unterricht einsetzen, zeigen Ihnen folgende Hinweise.

Kapitel 1: Seiten und Winkel in rechtwinkligen Dreiecken

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen die Begriffe *Hypotenuse*, *Ankathete* und *Gegenkathete* und die Winkelfunktionen *Sinus*, *Cosinus* und *Tangens* in rechtwinkligen Dreiecken kennen.

Hinweise zur Durchführung:

Im einführenden Beispiel können die Schüler/innen erkunden, dass die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nur von den Innenwinkeln aber nicht von den Längen der Seiten abhängen. Diese Tatsache sollen die Schüler/innen dann an weiteren, selbst gezeichneten Dreiecken überprüfen. Im *Merkekasten* auf Folie 3 werden die Begriffe *Hypotenuse*, *Ankathete* und *Gegenkathete* und die Winkelfunktionen *Sinus*, *Cosinus* und *Tangens* definiert. Diesen *Merkekasten* sollten die Schüler/innen unbedingt abschreiben. Wie man die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks korrekt bezeichnet, können die Schüler/innen in Übung 1 üben. In den Übungen 2 und 3 auf Folie 4 sollen die Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken mit den richtigen Seitenverhältnissen beschrieben werden. Falls einige Schüler/innen noch Probleme haben, rechtwinklige Dreiecke zu zeichnen, können Sie an dieser Stelle die Folie 27 im Anhang einsetzen. Darauf wird zum einen beschrieben, wie man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten konstruiert (trivialer Fall), zum anderen wird gezeigt, wie man ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Thaleskreis so zeichnen kann, dass es auf der Hypotenuse liegt.

Zeitbedarf: ca. 1-2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 2: Bedienen des Taschenrechners

Lernziele:

Die Schüler/innen lernen, mit welcher Tastenfolge man auf dem Taschenrechner aus einem Winkel den Wert der entsprechenden Winkelfunktion berechnet bzw. umgekehrt aus dem Wert einer Winkelfunktion den zugehörigen Winkel.

Hinweise zur Durchführung:

In Beispiel 1 (Folie 5) soll mit dem Taschenrechner der Wert von $\sin 30^\circ$ berechnet werden. Je nach Taschenrechnertyp unterscheidet sich bei der Berechnung die Tastenfolge. Die gängigsten Tastenfolgen sind in der Lösung angegeben. Außerdem sollten Sie die Schüler/innen darauf hinweisen, dass der Taschenrechner auf Gradmaß eingestellt sein sollte. In Beispiel 2 (Folie 6) geht es darum, mit welcher Tastenfolge man aus Gleichungen der Art $\cos \alpha = 0{,}5$ den Winkel α berechnet. Auch hier müssen Sie berücksichtigen, welchen Taschenrechnertyp die Schüler/innen benutzen. Mit den Übungen 1 und 2 können sich die Schüler/innen dann mit der jeweiligen Tastenfolge auf dem eigenen Taschenrechner vertraut machen.

Zeitbedarf: ca. 1 Schulstunde; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 3: Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken

Lernziele:

In diesem Abschnitt lernen die Schüler/innen, wie man aus zwei Angaben die fehlenden Seitenlängen und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet.

Hinweise zur Durchführung:

In Beispiel 1 wird gezeigt, wie man die fehlenden Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet, wenn ein Winkel und eine Seitenlänge bekannt sind. Wie man vorgeht, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks angegeben sind, wird in Beispiel 2 besprochen. Beide Beispiele können insbesondere von den stärkeren Schülerinnen und Schülern auch selbstständig bearbeit werden. Die Vorgehensweise zur Berechnung fehlender Größen in rechtwinkligen Dreiecken ist im *Merkekasten* auf Folie 8 zusammengefasst. Die Berechnung fehlender Größen in rechtwinkligen Dreiecken kann dann in den Übungen 1 und 2 geübt werden. Zur Konstruktion der Dreiecke in Übung 1 und 2 ist eventuell etwas Hilfestellung nötig.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 4: Berechnungen in allgemeinen Dreiecken

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man in allgemeinen Dreiecken aus drei Angaben die fehlenden Winkel und Seitenlängen berechnet.

Hinweise zur Durchführung:

Die beiden Beispiele auf den Folien 10 und 11 zeigen, wie man durch Einzeichnen einer passenden Höhe auch in *allgemeinen* Dreiecken alle fehlenden Seitenlängen und Winkel berechnen kann. Eventuell muss hier noch kurz das Einzeichnen von Höhen in Dreiecken wiederholt werden, da erfahrungsgemäß immer wieder einige Schüler/innen mit dem richtigen Anlegen des Geodreiecks Schwierigkeiten haben. Die Lösungen zu den Beispielen sind so ausführlich, dass sie auch von schwächeren Schülerinnen und Schülern leicht nachvollzogen werden können. In der Übung auf Folie 12 muss eventuell der Tipp gegeben werden, dass die benötigte Dreieckshöhe außerhalb des Dreiecks liegt.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 5: Berechnungen in Vielecken

Lernziele:

Die Schüler/innen erkennen, wie man mithilfe der Trigonometrie und logischen Schlussfolgerungen fehlende Längen und Winkel in Vielecken berechnen kann.

Hinweise zur Durchführung:

Das Beispiel auf Folie 13 zeigt, wie durch ein einhüllendes Rechteck um ein Viereck rechtwinklige Dreiecke entstehen. Ausgehend von den Seiten und Winkel eines dieser Dreiecke können dann schrittweise die Seiten und Winkel des nächsten rechtwinkligen Dreiecks berechnet werden. Diese Vorgehensweise ist im *Merkekasten* auf Folie 14 beschrieben und kann in der Übung geübt werden. Die Schüler/innen sollten darüber hinaus aber noch weitere Aufgaben aus dem Schulbuch bearbeiten, da die Berechnung an Vielecken ein Prüfungsthema ist und erfahrungsgemäß einige Übung erfordert.

Zeitbedarf: ca. 2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 6: Berechnungen mit Parametern

Lernziele:

Die Schüler/innen können trigonometrische Berechnungen auch mit einem Parameter durchführen.

Hinweise zur Durchführung:

Im Beispiel auf Folie 15 wird gezeigt, wie man in einem Vieleck eine Strecke in Abhängigkeit von einem Parameter berechnet, was ein wichtiges Prüfungsthema ist. Probleme bereitet es dabei erfahrungsgemäß vielen Schülerinnen und Schülern, den Parameter wie eine Zahl zu behandeln. Weitere Stolperfallen lauern beim Auflösen von Doppelbrüchen und beim Vereinfachen von Wurzeltermen. Diese Themen können Sie mit dem Exkurs auf den Folien 17 bis 19 kurz und einprägsam wiederholen.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen auch mehr.

Kapitel 7: Besondere Werte von Sinus, Kosinus und Tangens

Lernziele:

Die Schüler/innen erkennen, wie man besondere Werte der trigonometrischen Funktionen herleiten kann.

Hinweise zur Durchführung:

In den drei Beispielen dieses Kapitels werden die besonderen Werte von Sinus, Cosinus und Tangens für die Winkel 30°, 45° und 60° hergeleitet. Nachdem die Schüler/innen in Kapitel 6 mit dem Umgang mit Parametern vertraut gemacht wurden, können diese Beispiele insbesondere von den stärkeren Schülerinnen und Schülern auch als Übungsaufgaben bearbeitet werden. Auf Folie 22 sind alle besonderen Werte trigonometrischer Funktionen in einer Übersichtstabelle zusammengefasst.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden.

8. Checkliste - was man nun wissen sollte

Anhand der Fragen der Checkliste auf Folie 22 können Sie die wichtigsten Kenntnisse zum Thema „*Trigonometrie*“ in kompakter Form abfragen und wiederholen. Auf diese Weise erhalten Ihre Schüler/innen einen guten Überblick über den eigenen Kenntnisstand. Die Antworten auf die Fragen finden Sie als Kopiervorlage in doppelter Ausführung, sodass Sie nur jeweils 1 Blatt für zwei Schüler/innen kopieren müssen.

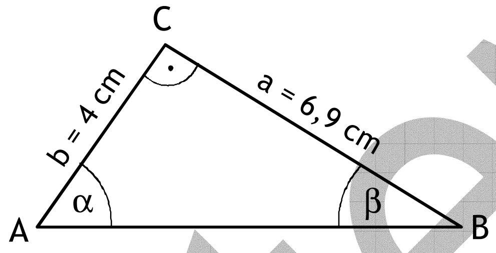
Zeitbedarf: ca. 45 min.

Anhang: Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke

Mit der Folie 27 können Sie den Schülerinnen und Schülern zum einen zeigen, wie man ein rechtwinkliges Dreieck mithilfe der Katheten konstruiert. Dieser triviale Fall dürfte aber den meisten Schülerinnen und Schülern von selbst klar sein.
Zum anderen enthält diese Folie die Anleitung dazu, wie man ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Thaleskreis so konstruiert, dass es auf der Hypotenuse liegt.

Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke

Beispiel 1:



Konstruiere das rechtwinklige Dreieck ABC.

Warum verläuft die Hypotenuse des konstruierten Dreiecks (in der Regel) nicht waagrecht?

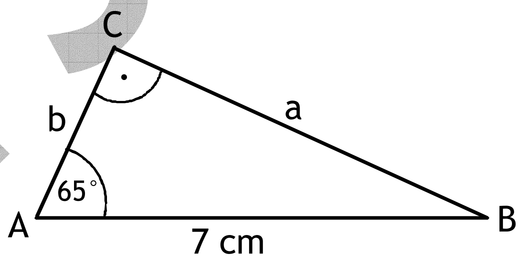
Lösung:

① Zeichne die Kathete a = 6,9 cm und rechtwinklig dazu die Kathete b = 4 cm.

② Verbinde die Endpunkte A und B der Katheten.

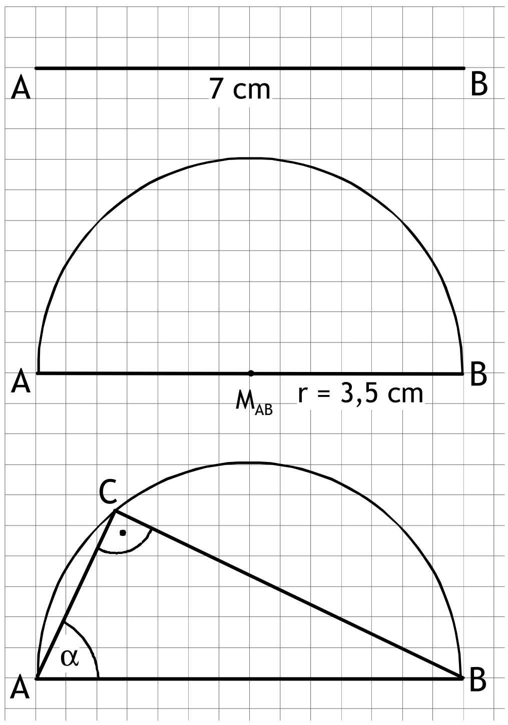
Da man die Größe der Winkel α und β nicht kennt, kann man die Kathete a nicht unter einem solchen Winkel zeichnen, dass die Hypotenuse c waagrecht verläuft.

Beispiel 2:



Konstruiere das rechtwinklige Dreieck so, dass es auf der Hypotenuse liegt.

Lösung:



① Zeichne zuerst die Hypotenuse c = 7 cm.

② Zeichne dann einen Halbkreis über der Hypotenuse mit r = 0,5c = 3,5 cm.

③ Zeichne von A aus eine Halbgerade mit $\alpha = 65°$. Dort, wo diese Halbgerade den Halbkreis schneidet, ist der Punkt C.

④ Verbinde C mit B.

Hinweis:

Nach dem **Satz des Thales** muss der Winkel γ immer 90° betragen.