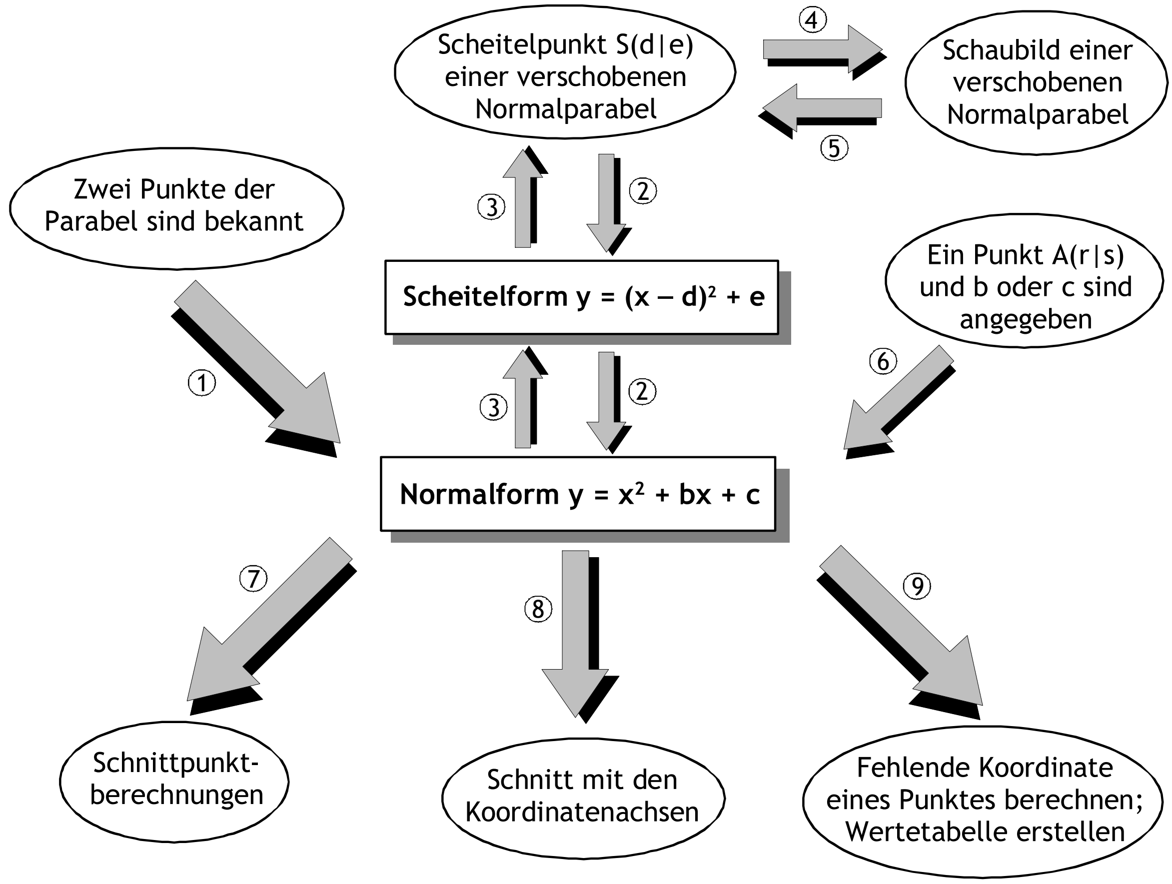
Mind-Map zum Thema „*Parabeln*“:

Mit der folgenden Grafik können Sie mühelos jede Parabelaufgabe lösen. Markieren Sie dazu die Felder, die zu den Vorgaben in der jeweiligen Aufgabenstellung passen. Markieren Sie außerdem das Feld bzw. die Felder, wonach in der Aufgabenstellung gefragt ist. Die Pfeile zeigen Ihnen dann, wie Sie vorgehen müssen, um die Aufgabe zu lösen. Der jeweilige Lösungsweg ist unter der entsprechenden Nummer beschrieben. Eine beispielhafte Aufgabe zur Benutzung der Mind-Map finden Sie in der Datei <***Mind-Map Parabeln.pdf***>.



① Die bekannten Koordinaten zweier Punkte muss man jeweils in $y = x^2 + bx + c$ einsetzen und dann das entsprechende Gleichungssystem nach b und c auflösen. **Man beachte**: Punktkoordinaten können auch in einem Schaubild oder in einer Wertetabelle abgelesen werden !

② Mit den Koordinaten des Scheitelpunkts S(d|e) kann man sofort die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ angeben. Durch Ausmultiplizieren der Quadratklammer erhält man die Normalform $y = x^2 + bx + c$.

③ Mithilfe einer quadratischen Ergänzung erhält man aus der Normalform $y = x^2 + bx + c$ die Scheitelform. Daran kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts S(d|e) direkt ablesen.

④ Die Koordinaten des Scheitelpunkts benötigt man, wenn man eine verschobene Normalparabel zeichnen soll.

⑤ Umgekehrt sollte man aus einer vorgegebenen Zeichnung die Koordinaten des Scheitelpunkts ablesen, womit man dann die Scheitelform bzw. die Normalform aufstellen kann (siehe ②).

⑥ Indem man die Koordinaten eines Punktes A(r|s) und den Wert von b bzw. c in $y = x^2 + bx + c$ einsetzt, kann man den fehlenden b-Wert bzw. c-Wert berechnen.

⑦ Durch Gleichsetzen kann man die Schnittpunkte mit einer anderen Parabel bzw. einer Geraden berechnen.

⑧ Schnittpunkt mit der y-Achse: Setze in $y = x^2 + bx + c$ für $x = 0$.
Schnittpunkt mit der x-Achse: Setze in $y = x^2 + bx + c$ für $y = 0$ und löse nach x auf.

⑨ Durch Einsetzen der bekannten Punktkoordinate in die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ kann man die fehlende Koordinate eines Parabelpunkts berechnen bzw. eine Wertetabelle erstellen.

Sonderfall: Parabeln, die **symmetrisch zur y-Achse** verlaufen, haben die Gleichung $\mathbf{y = ax^2 + c}$.
Ihr Scheitelpunkt ist **S(0|c)**. Falls der Wert von c bekannt ist, kann man den **Wert von a** berechnen, indem man die Koordinaten eines Parabelpunkts in $y = ax^2 + c$ einsetzt. Für $\mathbf{a < 0}$ ist die Parabel **nach unten geöffnet**. Bei Normalparabeln ist $\mathbf{|a| = 1}$.
Die **Nullstellen** von Parabeln mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ liegen auch immer symmetrisch zur y-Achse: $\mathbf{N_1(-k|0)}$ **und** $\mathbf{N_2(k|0)}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Benutzung der Mind-Map zum Thema „*Parabeln*":

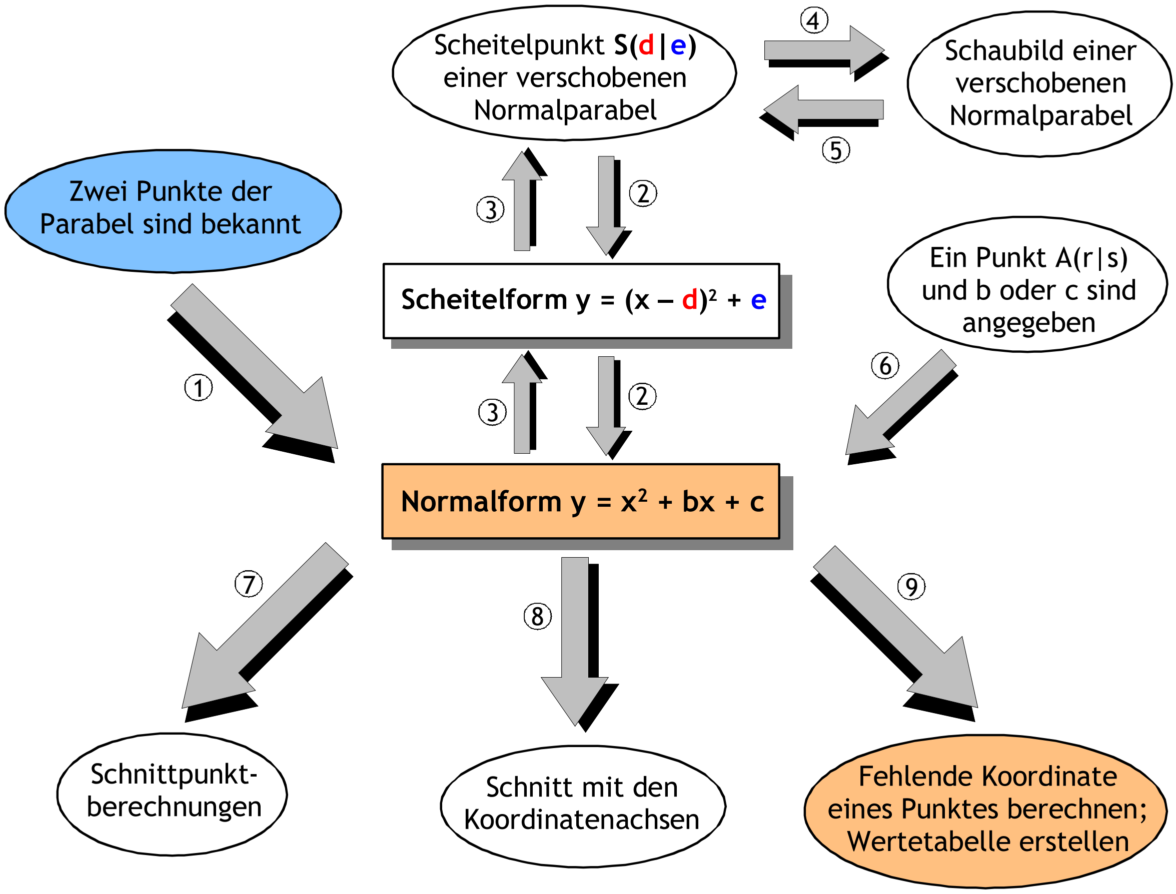
Beispiel 1:

Zu einer verschobenen, nach oben geöffneten Normalparabel p_1 gehört die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle.
Geben Sie die Gleichung der Parabel p_1 an und vervollständigen Sie die Wertetabelle.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y		3		3		

Lösung: (siehe unten und ausführliche Lösungen: <*Lösungen-2014.pdf*> Seite 18, 19)

Das Feld, das zu den *Vorgaben* der Aufgabenstellung passt, ist **blau** markiert.
Man beachte: Die Punktkoordinaten Q(−2|3) und R(0|3) kann man in der angegebenen Wertetabelle ablesen.
Gesucht sind die Gleichung der Parabel p_1 und die vervollständigte Wertetabelle (**rote** Felder).



Zur Lösung der Aufgabe benötigt man also die Rechenschritte ① und ⑨ :

① Die bekannten Koordinaten zweier Punkte muss man jeweils in $y = x^2 + bx + c$ einsetzen und dann das entsprechende Gleichungssystem nach b und c auflösen.

⑨ Durch Einsetzen der bekannten Punktkoordinate in die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ kann man die fehlende Koordinate eines Parabelpunkts berechnen bzw. eine Wertetabelle erstellen.

Lösung:

In der Wertetabelle sind die Koordinaten der Punkte Q(–2| 3) und R(0|3) angegeben.
Durch jeweiliges Einsetzen der Koordinaten von Q(–2| 3) und R(0|3) in die allgemeine Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$ erhält man zwei Gleichungen:

Mit Q(**–2**|**3**): $\mathbf{3} = (\mathbf{-2})^2 + b\cdot(\mathbf{-2}) + c \;\Leftrightarrow\; 3 = 4 - 2b + c$ (I)

Mit R(**0**|**3**): $\mathbf{3} = (\mathbf{0})^2 + b\cdot(\mathbf{0}) + c \;\Leftrightarrow\; 3 = c$ bzw. $\mathbf{c = 3}$ (II)

Einsetzen von c = 3 in Gleichung (I) ergibt: $3 = 4 - 2b + \mathbf{3}$

$$\Leftrightarrow\; 3 = 7 - 2b \quad | +2b - 3$$
$$\Leftrightarrow\; 2b = 4 \quad | : 2$$
$$\Leftrightarrow\; \mathbf{b = 2}$$

Somit hat die Parabel p_1 die Gleichung: <u>$\mathbf{y = x^2 + 2x + 3}$</u>

Die fehlenden Koordinaten der Wertetabelle erhält man durch Einsetzen der x-Werte in die Parabelgleichung. Somit lautet die **vollständige Wertetabelle**:

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	**6**	3	**2**	3	**6**	**11**

Beispiel 2:

Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat die Nullstellen $N_1(-3|0)$ und $N_2(3|0)$. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel und die Koordinaten ihres Scheitelpunkts.

Lösung:

Da die Nullstellen $N_1(-3|0)$ und $N_2(3|0)$ symmetrisch zur y-Achse liegen, hat die Parabel die allgemeine Gleichung $y = ax^2 + c$. Und da es sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel handelt, muss **a = 1** sein.

Die vorläufige Gleichung ist also: $y = x^2 + c$

Den Wert von c erhält durch Einsetzen eines Parabelpunkts.

Mit N_2(**3**|**0**) folgt: $\mathbf{0} = (\mathbf{3})^2 + c \;\Leftrightarrow\; \mathbf{c = -9}$

Damit ist die Gleichung der Parabel: $\mathbf{y = x^2 - 9}$. Ihr Scheitelpunkt ist **S(0|–9)**.