

Tipps und Tricks für die Abschlussprüfung

Rechentipps und Lösungsstrategien mit Beispielen
zu allen Prüfungsthemen (Hauptschule)

Mathematik
Baden-Württemberg



Vorwort:

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die folgenden Kapitel möchten dir wertvolle Tipps und Tricks vermitteln, um die Prüfungsaufgaben in Mathematik möglichst erfolgreich bearbeiten zu können.

Jedes Kapitel beginnt mit den wichtigsten Regeln und Kenntnissen zum jeweiligen Thema. Diese Regeln und Kenntnisse solltest du unbedingt „draufhaben“. Die dabei erwähnten Formeln kannst du selbstverständlich auch in der Formelsammlung nachschlagen. Für den Pflichtteil A1 musst du allerdings auch einige Formeln und Regeln auswendig wissen. Welche Formeln dies sind, findest du in der Datei <Formelwissen für A1.pdf>.

Im Anschluss an jeden Regelkasten wird anhand einer typischen Prüfungsaufgabe Schritt für Schritt ein Lösungsweg vorgestellt. Die einzelnen Schritte sind dabei so ausführlich beschrieben, dass du den Lösungsweg sicher mühelos nachvollziehen kannst.

Zur besseren Orientierung dienen folgende Symbole:



Diese Regeln und Kenntnisse solltest du dir einprägen.



Die Glühbirne weist auf Tipps, wertvolle Rechenricks und typische Stolperfallen hin.



Das Blatt mit dem Stift markiert typische Aufgabenstellungen, wie sie in der Prüfung öfter vorkommen.



In den durch das Taschenrechner-Symbol gekennzeichneten Kästen stehen Tipps zum Umgang mit dem Taschenrechner.

Inhaltsverzeichnis:

1. Rechnen mit Zahlen	
1.1. Schriftliche Multiplikation zweier ganzer Zahlen	4
1.2. Schriftliche Division von ganzen Zahlen	5
1.3. Rechnen mit negativen Zahlen	5
1.4. Zahlenreihen fortführen	7
1.5. Rechnen mit Dezimalzahlen	8
1.6. Überschlagsrechnung	9
1.7. Quadrieren und Wurzelziehen	10
1.8. Rechnen mit Zehnerpotenzen	11
2. Bruchrechnung	
2.1. Brüche und ihre Bedeutung	14
2.2. Brüche kürzen und erweitern	16
2.3. Gemischte Brüche und Brüche als Dezimalzahlen	17
2.4. Größenvergleich von Brüchen	18
2.5. Addition und Subtraktion zweier Brüche	19
2.6. Multiplikation und Division zweier Brüche	20
3. Terme und Gleichungen	
3.1. Terme vereinfachen	21
3.2. Terme aufstellen	22
3.3. Gleichungen lösen	23
4. Prozentrechnung und Zinsrechnung	
4.1. Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz berechnen	25
4.2. Der verringerte Grundwert	27
4.3. Geschachtelte Aufgaben der Prozentrechnung	27
4.4. Zinsrechnung	28
4.5. Prozentsätze in Diagrammen	30
5. Größen und Winkel	
5.1. Längeneinheiten	32
5.2. Flächeneinheiten	33
5.3. Volumeneinheiten	33
5.4. Gewichte (Massen)	34
5.5. Zeiteinheiten	34
5.6. Uhrzeit und Zeitdauer	35
5.7. Winkel messen und zeichnen	36
<small>5. Wissenste</small>	
6. Flächen und Körper	
6.1. Flächeninhalt und Umfang	38
6.2. Winkel in Dreiecken und Vierecken	40
6.3. Dreieckskonstruktionen	41
6.4. Der Satz des Pythagoras	43
6.5. Volumen von Körpern	44
7. Funktionale Zusammenhänge	
7.1. Der Maßstab von Zeichnungen	46
7.2. Dreisatzrechnung (proportional und umgekehrt proportional)	47
7.3. Grafische Darstellung von Zusammenhängen	50
8. Daten und Wahrscheinlichkeit	
8.1. Relative und absolute Häufigkeit	53
8.2. Der Mittelwert (Durchschnitt) einer Datenreihe	53
8.3. Kombinationsmöglichkeiten	54
8.4. Wahrscheinlichkeiten berechnen	56

1. Rechnen mit Zahlen

1.1. Schriftliche Multiplikation zweier ganzer Zahlen:

- Für die Prüfung solltest du das **kleine Einmaleins** fehlerfrei beherrschen. Falls du darin noch Mängel hast, kannst du dir unter <http://matheverlag.com/hauptschule> Einmaleins-Kärtchen herunterladen und ausdrucken. Mit diesen Kärtchen kannst du dann effektiv üben.
- **Produkte zwischen einer 2-stelligen und einer 1-stelligen Zahl** kannst du schnell berechnen, indem du die 2-stellige Zahl in ihre Zehner- und Einerstelle zerlegst. Zum Beispiel zerlegst du im Produkt $36 \cdot 8$ zuerst 36 zu $36 = 30 + 6$. Anschließend multiplizierst du beide Zahlen mit dem einstelligen Faktor 8 . Du erhältst: $8 \cdot 30 = 240$ und $8 \cdot 6 = 48$. Das Ergebnis ist dann $240 + 48 = 288$. (Selbstverständlich kannst du solche Produkte auch schriftlich so berechnen, wie ein Produkt zwischen zwei 2-stelligen Zahlen.)
- **Produkte zwischen zwei 2-stelligen Zahlen** solltest du schriftlich berechnen. Achte dabei darauf, dass du alle Ziffern sauber in die Kästchen schreibst (siehe Beispiel 3). Produkte zwischen 3-stelligen Zahlen kommen in der Prüfung so gut wie nie vor.
- Bei **Produkten zweier Zehnerzahlen** lässt du zuerst die Nullen weg. Anschließend fügst du die Nullen dem Ergebnis wieder an. Z.B.: Bei dem Produkt $4000 \cdot 70$ rechnest du zuerst $4 \cdot 7 = 28$. Anschließend fügst du 4 Nullen an: $4000 \cdot 70 = 280000$



← Tipp

Beispiel 1: Berechne die Produkte, indem du zuerst den zweistelligen Faktor zerlegst:

- a) $21 \cdot 7$ b) $65 \cdot 4$ c) $57 \cdot 9$ d) $73 \cdot 6$

Lösung:

- a) $21 \cdot 7 = (20 + 1) \cdot 7 = 20 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 140 + 7 = 147$
 b) $65 \cdot 4 = (60 + 5) \cdot 4 = 60 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 240 + 20 = 260$
 c) $57 \cdot 9 = (50 + 7) \cdot 9 = 50 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 450 + 63 = 513$
 d) $73 \cdot 6 = (70 + 3) \cdot 6 = 70 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 420 + 18 = 438$

Beispiel 2: Berechne die Produkte:

- a) $500 \cdot 40$ b) $30000 \cdot 700$ c) $600 \cdot 4000$ d) $9000 \cdot 5000$

Lösung:

- a) $500 \cdot 40 = 20\ 000$ b) $30\ 000 \cdot 700 = 21\ 000\ 000$
 c) $600 \cdot 4000 = 2\ 400\ 000$ d) $9000 \cdot 5000 = 45\ 000\ 000$

Beispiel 3: Berechne die Produkte schriftlich: a) $25 \cdot 31$ b) $54 \cdot 43$

Lösung:

a)

	2	5	·	3	1
				7	5
	+			2	5
				7	7
					5

In Worten:

- Erste Zeile:** 3 mal 5 = 15; schreibe 5, behalte 1.
 3 mal 2 = 6, addiere 1 zu 6 und schreibe 7.
Zweite Zeile: 1 mal 5 = 5, schreibe 5.
 1 mal 2 = 2; schreibe 2.

b)

	5	4	·	4	3
				2	1
				1	6
					2
				1	
				2	3
					2

In Worten:

- Erste Zeile:** 4 mal 4 = 16; schreibe 6, behalte 1.
 4 mal 5 = 20, addiere 1 zu 20 und schreibe 21.
Zweite Zeile: 3 mal 4 = 12, schreibe 2, behalte 1.
 3 mal 5 = 15; addiere 1 zu 15 und schreibe 16.

1.2. Schriftliche Division von ganzen Zahlen:

Für den Prüfungsteil A1 solltest du die **schriftliche Division durch eine einstellige Zahl** beherrschen. Die Division durch zweistellige Zahlen wird so gut wie nie benötigt. In den Prüfungsteilen A2 und B kannst du Divisionen mit dem Taschenrechner durchführen. Das Beispiel zeigt dir, wie du die schriftliche Division sauber durchführst. Als Hilfestellung kannst du dir die Reihe des Teilers am Rand aufschreiben.



← **Merke**

Beispiel 4:

Eine Lotto-Gemeinschaft aus 8 Personen hat 12548 € gewonnen. Wie viel Euro bekommt jede Person?

Lösung:

Man muss den Quotienten $12548 : 8$ berechnen.

	1	2	5	4	8	:	8	=	1	5	6	8	5
-		8											
		4	5										
-		4	0										
			5	4									
-			4	8									
				6	8								
-				6	4								
					4	0							
-					4	0							
						0							

Komma setzen

Hinweis:

• Wenn in der Zahl links (= Dividend) alle Ziffern „aufgebraucht“ sind und der Quotient noch nicht aufgeht, musst du im Ergebnis ein Komma setzen und mit Nullen weiter rechnen (siehe rote „0“).

• Zur Hilfestellung kannst du dir die 8er-Reihe notieren:

$$8 \rightarrow 16 \rightarrow 24 \rightarrow 32 \rightarrow 40 \rightarrow 48 \rightarrow 56 \rightarrow 64 \rightarrow 72$$

Ergebnis: Es ist $12548 : 8 = 1568,5$. Jede Person der Lotto-Gemeinschaft bekommt also **1568,50 €**.

1.3. Rechnen mit negativen Zahlen:

• Das Ergebnis von **Rechenausdrücken** wie $a + b$ und $a - b$ (mit $b > 0$) bestimmt man nach folgenden Regeln:

- Das Ergebnis hat immer das **Vorzeichen**, das vor dem größeren Zahlzeichen steht. Steht in $a \pm b$ vor a kein Vorzeichen, ist immer Plus gemeint.
- Wenn vor beiden Zahlzeichen das **gleiche Vor- bzw. Rechenzeichen** steht, addiert man beide Zahlzeichen (siehe Beispiel 5d).
- Wenn vor beiden Zahlzeichen **unterschiedliche Vor- bzw. Rechenzeichen** stehen, subtrahiert man vom größeren Zahlzeichen das kleinere (siehe Beispiele 5a), b) und c).

• **Klammerausdrücke** wie $+(+a)$; $+(-a)$; $-(+a)$ und $-(-a)$ werden nach folgender Regel aufgelöst:

$$+(+a) = +a$$

$$-(-a) = +a$$

$$+(-a) = -a$$

$$- (+a) = -a$$

In Worten: Zwei gleiche Vorzeichen ergeben „Plus“; zwei unterschiedliche Vorzeichen ergeben „Minus“.



← **Merke**

Beispiel 5:

Überlege dir zuerst, welches Vorzeichen das Ergebnis hat. Berechne dann den Betrag des Ergebnisses.

a) $+12 - 17$

b) $-23 + 32$

c) $-37 + 24$

d) $-45 - 31$

Lösung:

- a) Das Ergebnis muss **negativ** sein, weil vor dem größeren Zahlzeichen (17) ein Minus steht. Weil vor beiden Zahlzeichen unterschiedliche Vorzeichen stehen, muss man $17 - 12 = 5$ rechnen. Also ist: $+12 - 17 = -5$
- b) Das Ergebnis muss **positiv** sein, weil vor dem größeren Zahlzeichen (32) ein Plus steht. Weil vor beiden Zahlzeichen unterschiedliche Vorzeichen stehen, muss man $32 - 23 = 9$ rechnen. Also ist: $-32 + 23 = +9$
- c) Das Ergebnis muss **negativ** sein, weil vor dem größeren Zahlzeichen (37) ein Minus steht. Weil vor beiden Zahlzeichen unterschiedliche Vorzeichen stehen, muss man $37 - 24 = 13$ rechnen. Also ist: $-37 + 24 = -13$
- d) Das Ergebnis muss **negativ** sein, weil vor beiden Zahlzeichen ein Minus steht. Weil vor beiden Zahlzeichen das gleiche Vorzeichen steht, muss man $45 + 31 = 76$ rechnen. Also ist: $-45 - 31 = -76$

Beispiel 6:

Löse zuerst die Klammern auf und berechne.

- a) $+25 - (+8)$ b) $-9 + (-14)$ c) $32 - (-12)$ d) $-17 + (+3)$

Lösung:

- a) $+25 - (+8) = +25 - 8 = +17 = 17$ b) $-9 + (-14) = -9 - 14 = -23$
 c) $32 - (-12) = +32 + 12 = +44 = 44$ d) $-17 + (+3) = -17 + 3 = -14$

Multiplikation und Division von negativen Zahlen:

Man multipliziert zwei negative Zahlen miteinander, indem man ihre Beträge multipliziert und das Vorzeichen des Ergebnisses nach folgenden Regeln bestimmt:

1. **plus mal plus = plus**
2. **minus mal minus = plus**
3. **plus mal minus = minus**
4. **minus mal plus = minus**

Diese Vorzeichenregeln gelten auch für Divisionen.



← Merke

Beispiel 7:

Berechne das Ergebnis unter Beachtung der Vorzeichenregeln.

- a) $+8 \cdot (-7)$ b) $-4 \cdot (-15)$ c) $-9 \cdot (+5)$
 d) $12 \cdot (-8)$ e) $-32 : 8$ f) $-72 : (-9)$

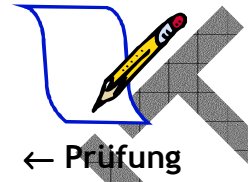
Lösung:

- a) $+8 \cdot (-7) = -56$ b) $-4 \cdot (-15) = +60$
 c) $-9 \cdot (+5) = -45$ d) $12 \cdot (-8) = -96$
 e) $-32 : 8 = -4$ f) $-72 : (-9) = +8$

Hinweis zu e): Es ist $8 = +8$

1.4. Zahlenreihen fortführen:

Im Prüfungsteil A1 können Zahlenreihen vorkommen, die du fortführen sollst. Dazu solltest du dir folgenden Tipp merken: In diesen Zahlenreihen des Teils A1 wechseln sich immer **zwei Rechenoperationen** ab. Als mögliche Rechenoperationen kommen Plus (Addition), Minus (Subtraktion) und Mal (Multiplikation) in Frage (eine Division kommt so gut wie nie vor). Die beiden Beispiele zeigen dir, wie du dabei geschickt vorgehst.



Beispiel 8:

Die Zahlenreihe folgt einer bestimmten Regel. Ergänze die nächsten beiden Zahlen.

2 5 4 7 6 9 □ □

Lösung:

- Betrachte zunächst nur die Sprünge zwischen der 1. und 2. Zahl (also $2 \rightarrow 5$), der 3. und 4. Zahl (also $4 \rightarrow 7$), der 5. und 6. Zahl (also $6 \rightarrow 9$). Zeichne diese Sprünge in die Zahlenreihe ein. Überlege dir dann, welche Rechenoperation diesen Sprüngen entspricht.

2 5 4 7 6 9 □ □
 $+3$ $+3$ $+3$

Die Rechenoperation für die eingezeichneten Sprünge ist immer „+3“.

- Betrachte dann die fehlenden Sprünge zwischen der 2. und 3. Zahl (also $5 \rightarrow 4$) und zwischen der 4. und 5. Zahl (also $7 \rightarrow 6$). Überlege dir dann, welche Rechenoperation diesen Sprüngen entspricht.

2 5 4 7 6 9 □ □
 -1 -1

Die Rechenoperation für die eingezeichneten Sprünge ist jeweils „-1“.

- Ergänze dann die Zahlenreihe mit Hilfe der abwechselnden Rechenoperationen: $9 - 1 = 8$ und $8 + 3 = 11$.

2 5 4 7 6 9 8 11
 $+3$ -1 $+3$ -1 $+3$ -1 $+3$

Beispiel 9:

Die Zahlenreihe folgt einer bestimmten Regel. Ergänze die nächsten beiden Zahlen.

-1 1 2 4 8 10 □ □

Lösung:

- Wenn man so wie in Beispiel 8 vorgeht, erkennt man folgende Regel: Die Rechenoperationen „plus 2“ und „mal 2“ wechseln sich ab.

-1 1 2 4 8 10 □ □
 $+2$ $\cdot 2$ $+2$ $\cdot 2$ $+2$ $\cdot 2$ $+2$

- Die nächsten beiden Zahlen der Reihe sind also: $10 \cdot 2 = 20$ und $20 + 2 = 22$

-1 1 2 4 8 10 20 22
 $+2$ $\cdot 2$ $+2$ $\cdot 2$ $+2$ $\cdot 2$ $+2$

1.5. Rechnen mit Dezimalzahlen:

- **Addition und Subtraktion** von Dezimalzahlen: Um zwei Dezimalzahlen schriftlich zu addieren bzw. subtrahieren, muss man sie so übereinander schreiben, dass beide Kommas übereinander stehen (siehe Beispiel 10). Ganze Zahlen sollte man dazu um ein Komma und um die nötigen Dezimalstellen ergänzen. Z.B. gilt: $25 = 25,0 = 25,00$
- **Multiplikation zweier Dezimalzahlen:** Zuerst berechnet man das Produkt, indem man die Kommas in den Dezimalzahlen gar nicht beachtet. Anschließend setzt man im Ergebnis das Komma so, dass es gleich viele Stellen rechts vom Komma hat wie in dem Produkt vorkommen (siehe Beispiel 11).
- **Division durch eine Dezimalzahl:** Wenn man durch eine Dezimalzahl teilt, muss man im Dividend (linke Zahl des Quotienten) und im Teiler die Kommas um die gleiche Anzahl an Stellen so weit nach rechts verschieben, bis das Komma im Teiler wegfällt (siehe Beispiel 12).



← **Merke**

Beispiel 10: Berechne.

- a) $3,75 \text{ kg} + 9,4 \text{ kg}$ b) $12,40 \text{ €} + 25 \text{ €}$ c) $100 \text{ €} - 75,35 \text{ €}$

Lösung:

- a) $3,75 \text{ kg} + 9,4 \text{ kg} = 13,15 \text{ kg}$ b) $12,40 \text{ €} + 25 \text{ €} = 37,50 \text{ €}$ c) $100 \text{ €} - 75,35 \text{ €} = 24,65 \text{ €}$

		3	7	5
+	9	4	0	
		1		
<hr/>				
	1	3	1	5

	1	2	4	0
+	2	5	0	0
<hr/>				
	3	7	4	0

-	1	0	0	0
	7	5	3	5
	1	1	1	1
<hr/>				
	2	4	6	5

Beispiel 11: Berechne das Produkt.

- a) $12,5 \cdot 9$ b) $7,5 \cdot 3,7$ c) $68,4 \cdot 0,25$

Lösung:

- a) $12,5 \cdot 9 = 112,5$ b) $7,5 \cdot 3,7 = 27,75$ c) $68,4 \cdot 0,25 = 17,100 = 17,1$

	1	2	5	·	9
<hr/>					
		1	1	2	5

	7	5	·	3	7
<hr/>					
		2	2	5	
+		5	2	5	
<hr/>					
		2	7	7	5

	6	8	4	·	2	5
<hr/>						
		1	3	6	8	
+		3	4	2	0	
<hr/>						
			1	1		
<hr/>						
		1	7	1	0	0

Beispiel 12: Berechne den Quotienten $30,56 : 0,8$.

Lösung:

Zunächst müssen die Kommas in Dividend und Teiler verschoben werden. Es gilt: $30,56 : 0,8 = 305,6 : 8$.

-	3	0	5	,	6	: 8	=	3	8	,	2
	2	4	↓								
		6	5								
-		6	4	↓							
			1	6							
-			1	6							
				0							

Komma setzen

Ergebnis:

$30,56 : 0,8 = 305,6 : 8 = 38,2$

Hinweis:

Beim Sprung über das Komma des Dividenden (linke Zahl des Quotienten) muss im Ergebnis ein Komma gesetzt werden.

1.6. Überschlagsrechnung:

Bei Überschlagsrechnungen müssen die Faktoren eines Produkts bzw. Dividend und Teiler eines Quotienten gerundet werden. Meistens muss man auf die erste oder zweite Stelle von links gerundet werden. Beim Runden gelten folgende Regeln:

1. Steht rechts von der Rundungsstelle eine 5; 6; 7; 8 oder 9, muss **auf**gerundet werden. Das heißt, die Ziffer dieser Stelle wird um 1 vergrößert. Die Ziffern rechts von der gerundeten Stelle werden zu 0.
2. Steht rechts von der Rundungsstelle eine 0; 1; 2; 3 oder 4, muss **ab**gerundet werden. Das heißt, die Ziffer dieser Stelle wird um 1 verringert. Die Ziffern rechts von der gerundeten Stelle werden zu 0.
3. Wenn an der Rundungsstelle eine „9“ steht und aufgerundet wird, wird aus der „9“ eine „10“. Zum Beispiel: $985 \approx 1000$
Wenn links von der „9“ eine weitere Ziffer steht, muss diese um 1 vergrößert werden. Zum Beispiel: $2961 \approx 3000$
(Hinweis: In der Prüfung ist die Rundungsstelle aber nur ganz selten eine „9“.)



← **Merke**

Beispiel 13:

Welcher Zahl kommt das Produkt $2497,5 \cdot 0,22$ am nächsten?

- 50 000 5000 500 50

Lösung:

Sinnvolle Rundungsstellen sind hier: $2497,5 \approx 2500$ und $0,22 \approx 0,2$. Damit ist $2497,5 \cdot 0,22 \approx 2500 \cdot 0,2$.
Wegen $2500 \cdot 0,2 = 500,0 = 500$ ist die Zahl **500** die richtige Antwort.

Beispiel 14:

Kreuze das richtige Ergebnis an. $10204,9 : 4,1 =$

- 24890 24,89 248,9 2489

Lösung:

Ein sinnvolles Runden ist hier: $10204,9 \approx 10\,000$ und $4,1 \approx 4$. Damit ist $10204,9 : 4,1 \approx 10\,000 : 4$.
Wegen $10\,000 : 4 = 2500$ ist die Zahl **2489** die richtige Antwort.

Gelegentlich kommt im Teil A1 der Prüfung folgende **spezielle Aufgabe** vor, die man elegant mit einer Überschlagsrechnung lösen kann:

Und zwar soll man in einem vorgegebenen Produkt die Kommas so setzen, dass das Produkt einen bestimmten Wert annimmt. Wie man dabei geschickt vorgeht, zeigt dir die Lösung zu Beispiel 15.



← **Prüfung**

Beispiel 15:

Setze die Kommas in dem Produkt $392 \cdot 587$ so, dass das Ergebnis zwischen 210 und 250 liegt.

Lösung:

Die richtigen Stellen der Kommas kann man durch Ausprobieren und mit Hilfe einer Überschlagsrechnung ermitteln:

- 1.) Kommasetzung und Überschlag: $3,92 \cdot 5,87 \approx 4 \cdot 6 = 24$. Dieses Ergebnis liegt nicht zwischen 210 und 250.
 - 2.) Kommasetzung und Überschlag: $39,2 \cdot 5,87 \approx 40 \cdot 6 = 240$. Dieses Ergebnis liegt zwischen 210 und 250.
 - 3.) Kommasetzung und Überschlag: $3,92 \cdot 58,7 \approx 4 \cdot 60 = 240$. Dieses Ergebnis liegt auch zwischen 210 und 250.
- Mögliche Lösungen sind also: $39,2 \cdot 5,87$ und $3,92 \cdot 58,7$.

1.7. Quadrieren und Wurzelziehen:

- Die Schreibweise a^2 (sprich: „a hoch 2“ oder „a Quadrat“) bedeutet: $a^2 = a \cdot a$
- \sqrt{a} (sprich: Wurzel von a, mit $a > 0$) ist diejenige positive Zahl b, für die gilt: $b^2 = a$.
Es gilt: $\sqrt{a^2} = a$ und $\sqrt{a^2} = a$. Man nennt \sqrt{a} auch „Quadratwurzel von a“.

Tip: In der Prüfung muss man lediglich den **Wert** einer Quadratwurzel \sqrt{a} abschätzen können. Dazu grenzt man den Wert der Wurzel ein, indem man die nächstkleinere und die nächstgrößere Quadratzahl zu a bestimmt (siehe Beispiel 16).



← Merke

Beispiel 16: Bestimme den ungefähren Wert der Quadratwurzeln:

- a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{79}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{65}$

Lösung:

a) Die nächstkleinere Quadratzahl zu 8 ist $4 = 2^2$. Die nächstgrößere Quadratzahl zu 8 ist $9 = 3^2$.

Es gilt also: $\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$ bzw. $2 < \sqrt{8} < 3$. Weil 8 aber näher bei 9 liegt, muss $\sqrt{8}$ auch näher bei 3 liegen. Richtige Antworten wären: $\sqrt{8} \approx 2,8$ bzw. $\sqrt{8} \approx 2,9$

b) Die nächstkleinere Quadratzahl zu 79 ist $64 = 8^2$. Die nächstgrößere Quadratzahl zu 79 ist $81 = 9^2$.

Es gilt also: $\sqrt{64} < \sqrt{79} < \sqrt{81}$ bzw. $8 < \sqrt{79} < 9$. Weil 79 aber näher bei 81 liegt, muss $\sqrt{79}$ auch näher bei 9 liegen. Richtige Antworten wären: $\sqrt{79} \approx 8,9$ bzw. $\sqrt{79} \approx 8,8$

c) Die nächstkleinere Quadratzahl zu 50 ist $49 = 7^2$. Die nächstgrößere Quadratzahl zu 50 ist $64 = 8^2$.

Es gilt also: $\sqrt{49} < \sqrt{50} < \sqrt{64}$ bzw. $7 < \sqrt{50} < 8$. Weil 50 aber näher bei 49 liegt, muss $\sqrt{50}$ auch näher bei 7 liegen. Richtige Antworten wären: $\sqrt{50} \approx 7,1$ bzw. $\sqrt{50} \approx 7,2$

d) Die nächstkleinere Quadratzahl zu 65 ist $64 = 8^2$. Die nächstgrößere Quadratzahl zu 65 ist $81 = 9^2$.

Es gilt also: $\sqrt{64} < \sqrt{65} < \sqrt{81}$ bzw. $8 < \sqrt{65} < 9$. Weil 65 aber näher bei 64 liegt, muss $\sqrt{65}$ auch näher bei 8 liegen. Richtige Antworten wären: $\sqrt{65} \approx 8,1$ bzw. $\sqrt{65} \approx 8,2$

Quadratzahlen und Quadratwurzeln bis 100:

Folgende Quadratzahlen und Wurzeln solltest du dir unbedingt merken.

$$2^2 = 4 \text{ und } \sqrt{4} = 2; \quad 3^2 = 9 \text{ und } \sqrt{9} = 3; \quad 4^2 = 16 \text{ und } \sqrt{16} = 4$$

$$5^2 = 25 \text{ und } \sqrt{25} = 5; \quad 6^2 = 36 \text{ und } \sqrt{36} = 6; \quad 7^2 = 49 \text{ und } \sqrt{49} = 7$$

$$8^2 = 64 \text{ und } \sqrt{64} = 8; \quad 9^2 = 81 \text{ und } \sqrt{81} = 9; \quad 10^2 = 100 \text{ und } \sqrt{100} = 10$$



← Merke

1.8. Rechnen mit Zehnerpotenzen:

Zehnerpotenzen

• In **Zehnerpotenzen** wie 10^2 ; 10^3 usw. gibt die Hochzahl an, wie viele Nullen die Zehnerzahl hat. Man sagt „10 hoch 2“ bzw. „10 hoch 3“ usw. Es gilt:

$10^1 = 10$; die Hochzahl ist 1, also hat die Zehnerzahl 1 Null.

$10^2 = 100$; die Hochzahl ist 2, also hat die Zehnerzahl 2 Nullen.

$10^3 = 1000$; die Hochzahl ist 3, also hat die Zehnerzahl 3 Nullen.

usw.

• **Mehrstellige Zahlen** können als Produkt zwischen einer **ganzen Zahl** und einer **Zehnerpotenz** geschrieben werden, wenn rechts von einer Ziffer nur noch Nullen vorkommen. Die Anzahl der Nullen der mehrstelligen Zahl ist darin die Hochzahl der Zehnerpotenz. Z.B. gilt: $280\ 000 = 28 \cdot 10^4$

• Wenn man eine **mehrstellige Zahl** als Produkt zwischen einer **Dezimalzahl** und einer **Zehnerpotenz** schreiben will, geht man so vor: Man setzt rechts von der höchsten Stelle der mehrstelligen Zahl ein Komma und zählt die Dezimalstellen. Die Anzahl der Dezimalstellen ist dann die Hochzahl der Zehnerpotenz. Z.B.: $280000 = 2,80000 \cdot 10^5$. Die Hochzahl ist hier „5“, weil 2,80000 fünf Dezimalstellen hat. In 2,80000 streicht man dann noch alle Nullen weg: $2,80000 \cdot 10^5 = 2,8 \cdot 10^5$.

• Umgekehrt kann man ein Produkt zwischen einer **Dezimalzahl** und einer **Zehnerzahl** ausführlich **als ganze Zahl** schreiben. Dazu fügt man der Dezimalzahl zunächst so viele Nullen an, dass die Anzahl ihrer Dezimalstellen mit der Hochzahl der Zehnerzahl übereinstimmt. Das Komma lässt man nach der Multiplikation mit der Zehnerpotenz weg. Z.B. gilt: $2,3 \cdot 10^5 = 2,30000 \cdot 10^5 = 230000$



← **Merke**

Beispiel 17: (für Teil A1, ohne Taschenrechner)

Schreibe die Zahl als Produkt zwischen einer **ganzen Zahl** und einer Zehnerpotenz.

Schreibe die Zahl anschließend als Produkt zwischen einer **Dezimalzahl** und einer Zehnerpotenz.

- a) 8200000 b) 125000 c) 450000000

Lösung:

a) $8200000 = 82 \cdot 10^5$. Die Hochzahl ist „5“, weil 8200000 fünf Nullen hat.

Außerdem gilt: $8200000 = 8,2 \cdot 10^6$. Die Hochzahl ist „6“, weil 8,200 000 sechs Dezimalstellen hat.

b) $125000 = 125 \cdot 10^3$. Die Hochzahl ist „3“, weil 125 000 drei Nullen hat.

Außerdem gilt: $125000 = 1,25 \cdot 10^5$. Die Hochzahl ist „5“, weil 1,25000 fünf Dezimalstellen hat.

c) $450000000 = 45 \cdot 10^8$. Die Hochzahl ist „8“, weil 400 000 000 acht Nullen hat.

Außerdem gilt: $450000000 = 4,5 \cdot 10^9$. Die Hochzahl ist „9“, weil 4,500 000 000 neun Dezimalstellen hat.

Beispiel 18: (für Teil A1, ohne Taschenrechner)

Schreibe das Produkt ausführlich als ganze Zahl.

- a) $2,1 \cdot 10^3$ b) $63,2 \cdot 10^5$ c) $7,25 \cdot 10^7$ d) $0,425 \cdot 10^6$

Lösung:

a) Man muss in 2,1 zwei Nullen anfügen, um 3 Dezimalstellen zu bekommen. Somit gilt:

$$2,1 \cdot 10^3 = 2,100 \cdot 10^3 = 2100$$

b) Man muss in 63,2 vier Nullen anfügen, um 5 Dezimalstellen zu bekommen. Somit gilt:

$$63,2 \cdot 10^5 = 63,20000 \cdot 10^5 = 6\ 320\ 000.$$

c) Man muss in 7,25 fünf Nullen anfügen, um 7 Dezimalstellen zu bekommen. Somit gilt:

$$7,25 \cdot 10^7 = 7,250000 \cdot 10^7 = 72\ 500\ 000$$

d) Man muss in 0,425 drei Nullen anfügen, um 6 Dezimalstellen zu bekommen. Anschließend muss man das Komma und die „0“ links vom Komma weglassen. Somit gilt: $0,425 \cdot 10^6 = 0,425000 \cdot 10^6 = 425\ 000$

Die Summe bzw. Differenz von Zehnerpotenzen

• Zur Berechnung der **Summe bzw. Differenz** von Produkten mit Zehnerpotenzen kann man die Zehnerpotenz (bei kleiner Hochzahl) als ganze Zahl schreiben.
Z.B.: $4,5 \cdot 10^3 + 25 \cdot 10^2 = 4500 + 2500 = 7000$

• Die **Summe bzw. Differenz** von Produkten mit **Zehnerpotenzen mit gleicher Hochzahl** kann man auch berechnen, indem man einfach die Faktoren addiert bzw. subtrahiert.
Z.B.: $2,5 \cdot 10^3 + 6,5 \cdot 10^3 = (2,5 + 6,5) \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^3 = 9000$

• Wenn die **Hochzahl** der Zehnerzahl aber **sehr groß** ist wie in $7,25 \cdot 10^9 + 0,6 \cdot 10^{10}$ sollte man die Zehnerpotenzen so umformen, dass alle Zehnerpotenzen der Summe die gleiche Hochzahl haben. Dazu wendet man folgende Regel an:

Wenn man aus einer Zehnerpotenz ...

- den **Faktor 10** „herauszieht“ verringert sich die Hochzahl **um 1**. Z.B.: $10^9 = 10 \cdot 10^8$
- den **Faktor 100** „herauszieht“ verringert sich die Hochzahl **um 2**. Z.B.: $10^9 = 100 \cdot 10^7$

Allgemein: Die Hochzahl verringert sich um die Anzahl der Nullen, die der „herausgezogene“ Faktor hat.



← **Merke**

Beispiel 19: (für Teil A1, ohne Taschenrechner)

Verringere die Hochzahl der Zehnerpotenz, indem du eine geeignete Zehnerzahl herausziehst. Ergänze die Lücken.

a) $10^7 = \underline{\quad} \cdot 10^5$ b) $10^{11} = \underline{\quad} \cdot 10^{10}$ c) $10^{12} = \underline{\quad} \cdot 10^9$ d) $10^{10} = \underline{\quad} \cdot 10^9$

Lösung:

a) $10^7 = 100 \cdot 10^5$ b) $10^{11} = 10 \cdot 10^{10}$ c) $10^{12} = 1000 \cdot 10^9$ d) $10^{10} = 10 \cdot 10^9$

Beispiel 20: (für Teil A1, ohne Taschenrechner)

Berechne.

a) $8 \cdot 10^9 + 0,6 \cdot 10^{10}$ b) $1,7 \cdot 10^{12} - 12 \cdot 10^{11}$ c) $0,05 \cdot 10^9 + 8,5 \cdot 10^7$

Lösung:

a) $8 \cdot 10^9 + 0,6 \cdot 10^{10} = 8 \cdot 10^9 + 0,6 \cdot 10 \cdot 10^9 = 8 \cdot 10^9 + 6 \cdot 10^9 = (8 + 6) \cdot 10^9 = 14 \cdot 10^9$

b) $1,7 \cdot 10^{12} - 12 \cdot 10^{11} = 1,7 \cdot 10 \cdot 10^{11} - 12 \cdot 10^{11} = 17 \cdot 10^{11} - 12 \cdot 10^{11} = (17 - 12) \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{11}$

c) $0,05 \cdot 10^9 + 8,5 \cdot 10^7 = 0,05 \cdot 100 \cdot 10^7 + 8,5 \cdot 10^7 = 5 \cdot 10^7 + 8,5 \cdot 10^7 = (5 + 8,5) \cdot 10^7 = 13,5 \cdot 10^7$

Größenvergleich von Produkten mit Zehnerpotenzen

Wenn man Produkte, in denen Zehnerpotenzen vorkommen, miteinander vergleichen soll, muss man die Produkte entweder als ganze Zahlen schreiben oder die Hochzahlen in den Produkten angleichen (siehe oben). Dazu sollte man sich an der Zehnerpotenz mit der kleinsten Hochzahl orientieren. Anschließend muss man nur noch die Faktoren vor den Zehnerpotenzen miteinander vergleichen (siehe Beispiel 21).



← **Prüfung**

Beispiel 21: (für Teil A1, ohne Taschenrechner)

Ordne die Zahlen der Größe nach. $0,65 \cdot 10^{12}$; $9 \cdot 10^{10}$; $3,25 \cdot 10^{11}$

Lösung:

Die kleinste Hochzahl in den drei Zehnerpotenzen ist 10. Man sollte also alle Zehnerpotenzen in Potenzen mit der Hochzahl 10 umwandeln. Es ist:

$$0,65 \cdot 10^{12} = 0,65 \cdot 100 \cdot 10^{10} = 65 \cdot 10^{10}; \quad 9 \cdot 10^{10} = 9 \cdot 10^{10}; \quad 3,25 \cdot 10^{11} = 3,25 \cdot 10 \cdot 10^{10} = 32,5 \cdot 10^{10}$$

Wegen $65 > 32,5 > 9$ ist: $0,65 \cdot 10^{12} > 3,25 \cdot 10^{11} > 9 \cdot 10^{10}$

Millionen, Milliarden, usw. als Zehnerpotenzen

Es gilt: Mio. = 1 Million = $10^6 = 1000\ 000$
 Mrd. = 1 Milliarde = $10^9 = 1000\ 000\ 000$
 Bio. = 1 Billion = $10^{12} = 1000\ 000\ 000\ 000$
 Brd. = 1 Billiarde = $10^{15} = 1000\ 000\ 000\ 000\ 000$

Die Reihe Mio. → Mrd. → Bio. → Brd. sollte man sich merken.

Tip: Von einem Sprung zum nächsten erhöht sich in dieser Reihe die Hochzahl der zugehörigen Zehnerpotenz um 3.

Steht vor der Abkürzung eine Zahl, ist das Produkt zwischen dieser Zahl und der zugehörigen Zehnerpotenz gemeint. Zum Beispiel ist $7\ \text{Mio.} = 7 \cdot 10^6$ oder $3\ \text{Brd.} = 3 \cdot 10^{15}$



← Merke

Beispiel 22: (für Teil A2 und Teil B)

Schreibe als Produkt mit einer Zehnerpotenz.

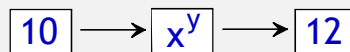
- a) 5 Mrd. b) 3,5 Mio. c) 12,5 Bio.

Lösung:

- a) $5\ \text{Mrd.} = 5 \cdot 10^9$ b) $3,5\ \text{Mio.} = 3,5 \cdot 10^6$ c) $12,5\ \text{Bio.} = 12,5 \cdot 10^{12}$

Potenzen in den Taschenrechner eintippen

• Potenzen gibt man mit folgender Tastenfolge in den Taschenrechner ein. Hier am Beispiel von 10^{12} :



Die Potenztaste „ x^y “ heißt auf manchen Taschenrechnern auch „ y^x “. Merke dir gut, wo sich die Potenztaste auf deinem Taschenrechner befindet.

• **Beachte:** Wenn man eine Zahl mit dem Taschenrechner durch ein Potenzprodukt wie $82\ \text{Mio.} = 82 \cdot 10^9$ teilen soll, muss man um das Potenzprodukt Klammern setzen: $(82 \cdot 10^9)$

• **Anzeige im Display:** Manche Taschenrechnern zeigen eine Potenz wie $5 \cdot 10^6$ durch „5 exp 6“ auf dem Display an. Auf anderen Taschenrechnern erscheint die Grundzahl „10“ einer Zehnerpotenz ziemlich klein. Mache dich daher damit vertraut, wie Potenzen auf *deinem* Taschenrechner angezeigt werden.



← Tipp

Beispiel 23: (für Teil A2 und Teil B)

Berechne mit dem Taschenrechner.

- a) $5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^6$ b) $\frac{8 \cdot 10^9}{4 \cdot 10^6}$ c) $2500\ \text{Mrd.} : 80\ \text{Mio.}$

Lösung:

- a) $5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^6 = 10 \cdot 10^{10} = 10^{11}$
 b) $\frac{8 \cdot 10^9}{4 \cdot 10^6} = 8 \cdot 10^9 : (4 \cdot 10^6) = 2 \cdot 10^3 = 2000$
 c) $2500\ \text{Mrd.} : 80\ \text{Mio.} = 2500 \cdot 10^9 : (80 \cdot 10^6) = 31250$

2. Bruchrechnung

2.1. Brüche und ihre Bedeutung:

Ein Bruch beschreibt einen Bruchteil von einer Größe. Jeder Bruch besteht aus einem Zähler, einem Nenner und einem Bruchstrich dazwischen.

Der Bruch "zwei Fünftel": $\frac{2}{5}$ ← Zähler
 ← Nenner

Der Nenner gibt an, in wie viele Teile das Ganze geteilt werden soll. Der Zähler gibt an, wie viele dieser Teile gemeint sind.

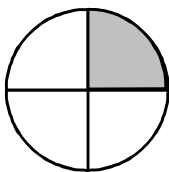


← Merke

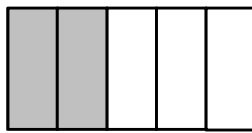
Beispiel 1:

Wie groß ist der Bruchteil (= Anteil) der markierten Felder an der gesamten Fläche?

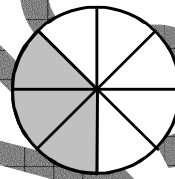
Figur A:



Figur B:



Figur C:



Lösung:

Figur A: Der Bruchteil der markierten Fläche an der gesamten Fläche ist ein Viertel. Man benutzt dafür die Bruchschreibweise: $\frac{1}{4}$ (sprich: „ein Viertel“)

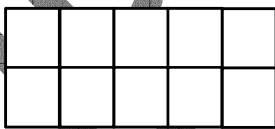
Figur B: Ein Teil des Streifens ist ein Fünftel. Da von insgesamt 5 Teilen 2 Teile markiert sind, ist der Bruchteil der markierten Fläche an der gesamten Fläche $\frac{2}{5}$ (sprich: "zwei Fünftel").

Figur C: Hier sind von insgesamt 8 Teilen des Kreises 3 Teile markiert. Der Bruchteil der markierten Fläche ist also $\frac{3}{8}$ (sprich: „drei Achtel“).

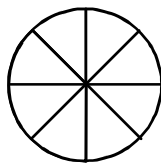
Beispiel 2:

Markiere jeweils den angegebenen Bruchteil.

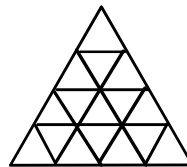
Figur A: $\frac{7}{10}$



Figur B: $\frac{5}{8}$

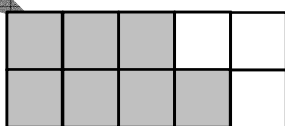


Figur C: $\frac{11}{16}$

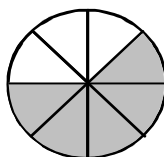


Lösung:

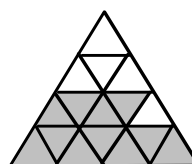
Figur A: $\frac{7}{10}$



Figur B: $\frac{5}{8}$



Figur C: $\frac{11}{16}$



7 von 10 Kästchen

5 von 8 Kreisausschnitten

11 von 16 Dreiecken

Bruchteile berechnen

Einen Bruchteil von etwas Ganzem berechnest du, indem du das Ganze durch den Nenner teilst und das Ergebnis anschließend mit dem Zähler multiplizierst.



← **Merke**

Beispiel 3: Berechne.

- a) $\frac{1}{3}$ von 24 Schülern b) $\frac{3}{8}$ von 48 kg c) $\frac{3}{5}$ von 250 Besuchern

Lösung:

- a) $\frac{1}{3}$ von 24 Schülern = (24 Schüler : 3) mal 1 = **8 Schüler**
 b) $\frac{3}{8}$ von 48 kg = (48 kg : 8) mal 3 = 6 kg mal 3 = **18 kg**
 c) $\frac{3}{5}$ von 250 Besuchern = (250 Besucher : 5) mal 3 = 50 Besucher mal 3 = **150 Besucher**

Brüche am Zahlenstrahl

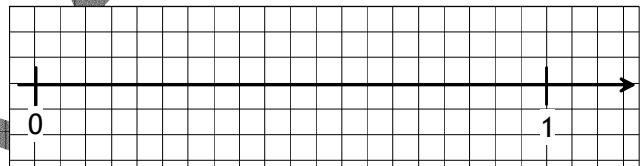
Im Teil A1 der Prüfung kommt öfter eine Aufgabe vor, in der du Brüche auf einen Zahlenstrahl eintragen sollst. Dazu musst du die Länge der Längeneinheit 1 messen oder durch Kästchenzählen bestimmen und dann den entsprechenden Bruchteil dieser Länge berechnen (siehe Beispiel 4). Die Länge dieses Bruchteils trägst du dann von „0“ aus auf dem Zahlenstrahl ab.



← **Tipps**

Beispiel 4:

Markiere die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ am Zahlenstrahl.



Lösung:

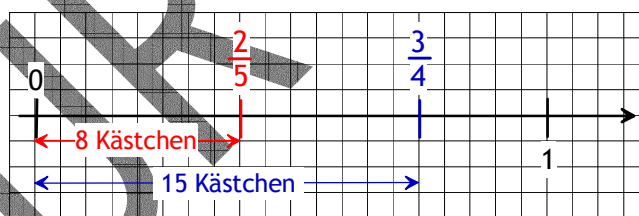
Zunächst muss man die Länge der Längeneinheit 1 bestimmen. Kästchenzählen ergibt: 1 LE = 20 Kästchen.

Anschließend muss man $\frac{3}{4}$ von 20 Kästchen bzw. $\frac{2}{5}$ von 20 Kästchen berechnen. Man erhält:

$\frac{3}{4}$ von 20 Kästchen sind (20 Kästchen : 4) mal 3 = 5 Kästchen mal 3 = **15 Kästchen**

$\frac{2}{5}$ von 20 Kästchen sind (20 Kästchen : 5) mal 2 = 4 Kästchen mal 2 = **8 Kästchen**

Die entsprechenden Stellen am Zahlenstrahl sind:



2.2. Brüche kürzen und erweitern:

- Die Multiplikation des Zählers und Nenners mit derselben Zahl nennt man **Erweitern eines Bruchs**.
- Die Division des Zählers und Nenners durch dieselbe Zahl nennt man **Kürzen eines Bruchs**.

Durch Kürzen und Erweitern verändert ein Bruch seinen Wert nicht.

- **Beachte:** Wenn du mit einem kompletten Zähler bzw. Nenner kürzen kannst, bleibt im Zähler bzw. Nenner immer eine „1“ übrig.

Z.B. gilt: $\frac{2}{10} = \frac{2:2}{10:2} = \frac{1}{5}$ oder $\frac{18}{6} = \frac{18:6}{6:6} = \frac{3}{1} = 3$



← **Merke**

Beispiel 5: Erweitere folgende Brüche mit der angegebenen Zahl.

a) $\frac{2}{7}$ mit 2

b) $\frac{5}{11}$ mit 4

c) $\frac{3}{4}$ mit 7

d) $\frac{7}{12}$ mit 6

Lösung:

a) $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{4}{14}$

b) $\frac{5}{11} = \frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 4} = \frac{20}{44}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$

d) $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 6} = \frac{42}{72}$

- In der Prüfung kannst du dich beim Kürzen auf die Zahlen **2; 3; 4; 5; 10** konzentrieren. Mit anderen Zahlen muss in der Regel nicht gekürzt werden.

- Wenn im Zähler und im Nenner **Zehnerzahlen** stehen, kannst du ganz bequem mit 10 kürzen: Dazu streichst du in Zähler und Nenner einfach jeweils gleich viele Nullen weg.

Z.B.: $\frac{410}{500} = \frac{41}{50}$.



← **Tipps**

Beispiel 6: Kürze folgende Brüche mit der angegebenen Zahl.

a) $\frac{8}{12}$ mit 4

b) $\frac{15}{25}$ mit 5

c) $\frac{18}{21}$ mit 3

d) $\frac{20}{30}$ mit 10

Lösung:

a) $\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{15}{25} = \frac{15:5}{25:5} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{18}{21} = \frac{18:3}{21:3} = \frac{6}{7}$

d) $\frac{20}{30} = \frac{20:10}{30:10} = \frac{2}{3}$

Mit dem **Taschenrechner** kannst du einen Bruch ganz bequem **kürzen**.

Die Tastenfolge zum Kürzen des Bruchs $\frac{18}{24}$ lautet auf den meisten Taschenrechnern:

$$\boxed{18} \longrightarrow \boxed{a^{b/c}} \longrightarrow \boxed{24} \longrightarrow \boxed{=}$$

Allerdings darfst du den Taschenrechner nur in den Teilen A2 und B benutzen.

Die Taste „ $a^{b/c}$ “ ist die **Bruchtaste**. Merke dir gut, wo sich die Bruchtaste auf *deinem* Taschenrechner befindet.



← **Tipps**

(Hinweis: Die Zahlen „18“ und „24“ wurden hier zur besseren Übersicht nur mit einer Taste beschrieben. Tatsächlich musst du natürlich 1 → 8 für „18“ und 2 → 4 für „24“ tippen.)

2.3. Gemischte Brüche und Brüche als Dezimalzahlen:



← **Merke**

- **Gemischte Brüche** wie $4\frac{2}{3}$ bestehen aus einer ganzen Zahl und einem Bruch.

Es gilt: $a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$

Man wandelt einen gemischten Bruch in einen unechten Bruch nach folgender Regel um:

$$a\frac{b}{c} = \frac{c \cdot a + b}{c}$$

(Hinweis: Unechte Brüche sind Brüche, deren Zähler größer als der Nenner ist.)

Im Fall von $4\frac{2}{3}$ erhält man also: $4\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{3} = \frac{14}{3}$

- Ein **Bruch** wird **in eine Dezimalzahl** umgewandelt, indem man den Quotient aus Zähler und Nenner berechnet. Die Dezimalzahlen der folgenden Brüche solltest du auswendig wissen:

$$\frac{1}{2} = 0,5 ; \quad \frac{1}{4} = 0,25 ; \quad \frac{3}{4} = 0,75 ;$$

$$\frac{1}{5} = 0,2 ; \quad \frac{2}{5} = 0,4 ; \quad \frac{3}{5} = 0,6 ; \quad \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\frac{1}{10} = 0,1 ; \quad \frac{2}{10} = 0,2 ; \quad \frac{3}{10} = 0,3 ; \quad \frac{4}{10} = 0,4 ; \quad \frac{5}{10} = 0,5 \text{ usw.}$$

Tip: Teste selbst mit dem Taschenrechner: $1:2 = \dots$; $1:4 = \dots$ usw.

Beispiel 7: Schreibe als unechten Bruch.

a) $3\frac{1}{2}$ b) $5\frac{3}{4}$ c) $8\frac{1}{5}$ d) $2\frac{3}{5}$

Lösung:

a) $3\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} = \frac{7}{2}$ b) $5\frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 5 + 3}{4} = \frac{23}{4}$

c) $8\frac{1}{5} = \frac{5 \cdot 8 + 1}{5} = \frac{41}{5}$ d) $2\frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 2 + 3}{5} = \frac{13}{5}$

Beispiel 8: Schreibe als Dezimalzahl.

a) $3\frac{1}{2}$ b) $5\frac{3}{4}$ c) $8\frac{1}{5}$ d) $4\frac{3}{5}$

Lösung:

a) $3\frac{1}{2} = 3 + 0,5 = 3,5$ b) $5\frac{3}{4} = 5 + 0,75 = 5,75$

c) $8\frac{1}{5} = 8 + 0,2 = 8,2$ d) $2\frac{3}{5} = 2 + 0,6 = 2,6$

Beispiel 9: Schreibe als Dezimalzahl. Du darfst den Taschenrechner benutzen.

a) $\frac{9}{20}$ b) $\frac{18}{25}$ c) $\frac{3}{50}$ d) $\frac{25}{80}$

Lösung:

a) $\frac{9}{20} = 9 : 20 = 0,45$ b) $\frac{18}{25} = 18 : 25 = 0,72$

c) $\frac{3}{50} = 3 : 50 = 0,06$ d) $\frac{25}{80} = 25 : 80 = 0,3125$

2.4. Größenvergleich von Brüchen:

- Zwei Brüche mit dem gleichen Nenner heißen **gleichnamige Brüche**. Von zwei gleichnamigen Brüchen ist derjenige Bruch größer, der den größeren Zähler hat.
- Wenn man zwei ungleichnamige Brüche miteinander vergleichen will, muss man sie auf den gleichen Nenner bringen. Ein **gemeinsamer Nenner** ist immer das Produkt beider Nenner (siehe Beispiel 10).

← **Merke**

Beispiel 10: Erweitere auf einen gemeinsamen Nenner und gib an, welcher Bruch größer bzw. kleiner ist.

- a) $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{9}$ c) $\frac{6}{7}$ und $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{3}$

Lösung:

a) Ein gemeinsamer Nenner von $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{5}$ ist $2 \cdot 5 = 10$. Erweitern auf den Nenner 10 ergibt jeweils:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} \quad \text{und} \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}. \quad \text{Wegen } \frac{5}{10} < \frac{6}{10} \text{ gilt: } \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$

b) Ein gemeinsamer Nenner von $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{9}$ ist $4 \cdot 9 = 36$. Erweitern auf den Nenner 36 ergibt jeweils:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{27}{36} \quad \text{und} \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{28}{36}. \quad \text{Wegen } \frac{27}{36} < \frac{28}{36} \text{ gilt: } \frac{3}{4} < \frac{7}{9}$$

c) Ein gemeinsamer Nenner von $\frac{6}{7}$ und $\frac{5}{6}$ ist $7 \cdot 6 = 42$. Erweitern auf den Nenner 42 ergibt jeweils:

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{36}{42} \quad \text{und} \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42}. \quad \text{Wegen } \frac{36}{42} > \frac{35}{42} \text{ gilt: } \frac{6}{7} > \frac{5}{6}$$

d) Ein gemeinsamer Nenner von $\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{3}$ ist $8 \cdot 3 = 24$. Erweitern auf den Nenner 24 ergibt jeweils:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}. \quad \text{Wegen } \frac{15}{24} < \frac{16}{24} \text{ gilt: } \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$$

Zahlen zwischen zwei Brüchen angeben

Eine oft gestellte Aufgabe im Teil A1 ist es, dass man zwei Zahlen angeben soll, die zwischen zwei vorgegebenen Brüchen liegen. Dazu musst du zuerst die beiden Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Anhand der Zähler kannst du dann leicht die gewünschten Zahlen bzw. Brüche angeben (siehe Beispiel 11).

← **Prüfung**

Beispiel 11: Gib zwei Zahlen an, die zwischen den Brüchen $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{7}$ liegen.

Lösung:

Ein gemeinsamer Nenner von $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{7}$ ist $5 \cdot 7 = 35$. Erweitern auf den Nenner 35 ergibt jeweils:

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{7}{35} \quad \text{und} \quad \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{10}{35}.$$

Zwei Zahlen, die zwischen $\frac{7}{35}$ und $\frac{10}{35}$ liegen, sind dann zum Beispiel: $\frac{8}{35}$ und $\frac{9}{35}$

Tipp: Je größer der gemeinsame Nenner, umso mehr Auswahlmöglichkeiten hat man. Mit dem gemeinsamen Nenner 350 hätte man im obigen Beispiel die Auswahl zwischen $\frac{70}{350}$ und $\frac{100}{350}$.

Also: $\frac{71}{350}$; $\frac{72}{350}$; $\frac{73}{350}$... $\frac{99}{350}$

2.5. Addition und Subtraktion von Brüchen:

- Man addiert bzw. subtrahiert zwei oder mehr gleichnamige Brüche, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Zähler beibehält.

Es gilt: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ und $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

- Wenn man zwei ungleichnamige Brüche addieren bzw. subtrahieren will, muss man sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner bringen (siehe Beispiel 13).



← **Merke**

Beispiel 12: Berechne.

a) $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{4} - \frac{3}{4}$ d) $\frac{6}{7} + \frac{3}{7} - \frac{8}{7}$

Lösung:

a) $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

c) $\frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1$ d) $\frac{6}{7} + \frac{3}{7} - \frac{8}{7} = \frac{6+3-8}{7} = \frac{1}{7}$

Beispiel 13: Bringe zuerst auf einen gemeinsamen Nenner und berechne dann.

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ b) $\frac{6}{7} - \frac{3}{4}$

Lösung:

a) Ein gemeinsamer Nenner von $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{3}$ ist $5 \cdot 3 = 15$. Erweitern auf den Nenner 15 ergibt jeweils:

$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$ und $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15}$. Damit ist $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$

b) Ein gemeinsamer Nenner von $\frac{6}{7}$ und $\frac{3}{4}$ ist $7 \cdot 4 = 28$. Erweitern auf den Nenner 28 ergibt jeweils:

$\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{24}{28}$ und $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$. Damit ist $\frac{6}{7} - \frac{3}{4} = \frac{24}{28} - \frac{21}{28} = \frac{3}{28}$

Rechnen mit gemischten Brüchen

Wenn man mit gemischten Brüchen rechnen will, muss man sie zuerst entweder in

unechte Brüche oder in Dezimalzahlen umwandeln. Es gilt: $a\frac{b}{c} = \frac{c \cdot a + b}{c}$

Eine Umwandlung in Dezimalzahlen ist aber nur bei Brüchen mit den Nennern 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50 sinnvoll.



← **Tip**

Beispiel 14: Berechne mit Hilfe von Dezimalzahlen oder unechten Brüchen.

a) $6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}$ b) $3\frac{2}{5} - 1\frac{1}{5}$ c) $4\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

Lösung:

a) $6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 6,5 + 4,5 = 11$ oder $6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = \frac{13}{2} + \frac{9}{2} = \frac{22}{2} = 11$

b) $3\frac{2}{5} - 1\frac{1}{5} = 3,4 - 1,2 = 2,2$ oder $3\frac{2}{5} - 1\frac{1}{5} = \frac{17}{5} - \frac{6}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$

c) $4\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{14}{3} + \frac{1}{3} = \frac{15}{3} = 5$ (Eine Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen ist hier nicht sinnvoll.)

2.6. Multiplikation und Division von Brüchen:

- Man **multipliziert** zwei Brüche, indem man ihre Zähler miteinander multipliziert und ihre Nenner miteinander multipliziert. Es gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- Man **multipliziert** eine ganze Zahl mit einem Bruch, indem man den Zähler des Bruchs mit der Zahl multipliziert und den Nenner beibehält. Es gilt:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

- Man **dividiert** einen Bruch durch einen anderen, indem man mit dem Kehrbuch des zweiten Bruchs multipliziert. Den Kehrbuch eines Bruchs erhält man, indem man seinen Zähler mit seinem Nenner vertauscht. Es gilt:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

- Man **dividiert** einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner des Bruchs mit der Zahl multipliziert und den Zähler beibehält. Es gilt:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$



← **Merke**

Beispiel 15: Berechne.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ b) $5 \cdot \frac{2}{9}$ c) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$ d) $\frac{6}{7} : 12$

Lösung:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$

b) $5 \cdot \frac{2}{9} = \frac{5 \cdot 2}{9} = \frac{10}{9}$

c) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 1} = \frac{24}{4} = 6$

d) $\frac{6}{7} : 12 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{12} = \frac{6}{84} = \frac{6 : 6}{84 : 6} = \frac{1}{14}$

Multiplikation und Division mit gemischten Brüchen

Wenn man eine Multiplikation oder Division mit gemischten Brüchen durchführen will,

muss man sie zuerst in unechte Brüche umwandeln. Es gilt: $a \frac{b}{c} = \frac{c \cdot a + b}{c}$



← **Tipp**

Beispiel 16: Berechne. a) $2 \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{2}{5}$ b) $6 \frac{3}{4} : \frac{1}{4}$

Lösung:

a) $2 \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{2}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

b) $6 \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{27}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{27 \cdot 4}{4 \cdot 1} = \frac{27}{1} = 27$

In den Teilen A2 und B kannst du Ausdrücke mit Brüchen bequem mit dem **Taschenrechner** berechnen. Dazu solltest du wissen, wie man einen Bruch in den Taschenrechner eingibt. Die Tastenfolge für den Bruch $\frac{18}{24}$ lautet auf den meisten Taschenrechnern:

$$\boxed{18} \longrightarrow \boxed{a \frac{b}{c}} \longrightarrow \boxed{24}$$

Die Taste „ $a \frac{b}{c}$ “ ist die **Bruchtaste**. Merke dir gut, wo sich die Bruchtaste auf *deinem* Taschenrechner befindet.



← **Tipp**

(Hinweis: Die Zahlen „18“ und „24“ wurden hier zur besseren Übersicht nur mit einer Taste beschrieben. Tatsächlich musst du natürlich 1 → 8 für „18“ und 2 → 4 für „24“ tippen.)

3. Terme und Gleichungen

3.1. Terme vereinfachen:

• Einen Rechenausdruck, in dem neben Zahlen und Rechenoperationen (plus, minus, mal; geteilt) auch Buchstaben bzw. Variablen (x, y, \dots) vorkommen, nennt man einen **Term mit Variablen**. Darin ist eine Variable ein Platzhalter, für den verschiedene Zahlen eingesetzt werden dürfen. Durch Einsetzen einer Zahl erhält der Term einen bestimmten Wert. Es gibt Terme mit nur einer Variablen aber auch Terme mit mehreren Variablen.

• Terme, die in der Variablen übereinstimmen und sich nur in den Vorfaktoren unterscheiden, nennt man **gleichartige Terme**. Man **addiert** bzw. **subtrahiert** gleichartige Terme, indem man die Summe bzw. Differenz der Vorfaktoren berechnet. Es gilt:

$$ax + bx = (a + b)x \quad \text{bzw.} \quad ax - bx = (a - b)x; \quad \text{mit den Vorfaktoren } a \text{ und } b$$

Zum Beispiel: $2x + 5x = 7x$ oder $8x - 5x = 3x$

Beachte:

„ ax “ bedeutet „ $a \cdot x$ “. Gewöhnlich lässt man aber den Malpunkt zwischen dem Vorfaktor und der Variablen weg. So gilt: $3 \cdot x = 3x$

Hat eine Variable keinen Vorfaktor, ist immer die „1“ gemeint. Es gilt: $x = 1x$



← **Merke**

Beispiel 1: Berechne den Wert des Terms, indem du die angegebene Zahl in die Variable einsetzt.

a) $x = 3$ in den Term $x + 4$

b) $x = 5$ in den Term $2 - x$

c) $x = 2$ in den Term $6 - 4x$

d) $a = 3$ und $b = 5$ in $a \cdot b$

e) $p = 25$ und $G = 120$ in $\frac{p}{100} \cdot G$

f) $c = 8$ und $h = 4$ in $\frac{1}{2} \cdot c \cdot h$

Lösung:

a) Einsetzen von $x = 3$ in $x + 4$ ergibt: $3 + 4 = 7$

b) Einsetzen von $x = 5$ in $2 - x$ ergibt: $2 - 5 = -3$

c) Einsetzen von $x = 2$ in $6 - 4x$ ergibt: $6 - 4 \cdot 2 = 6 - 8 = -2$. Man beachte in „ $6 - 4 \cdot 2$ “ die Regel „Punkt vor Strich“!

d) Einsetzen von $a = 3$ und $b = 5$ in $a \cdot b$ ergibt: $3 \cdot 5 = 15$

e) Einsetzen von $p = 25$ und $G = 120$ in $\frac{p}{100} \cdot G$ ergibt: $\frac{25}{100} \cdot 120 = \frac{25 \cdot 120}{100} = 30$

f) Einsetzen von $c = 8$ und $h = 4$ in $\frac{1}{2} \cdot c \cdot h$ ergibt: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$

Zusammenfassen von Summen

Um eine Summe zu vereinfachen, solltest du zuerst gleichartige Terme und Zahlen jeweils unterschiedlich markieren und zwar einschließlich des jeweiligen Vorzeichens! Anschließend fasst du jeweils die Summe der gleichartigen Terme und die Summe der Zahlen zusammen.

Z.B.: $3x + 4 - 2x + 5 = 3x + 4 - 2x + 5 = 3x - 2x + 4 + 5 = 1x + 9 = x + 9$



← **Tip**

Beispiel 2: Fasse die Summe so weit wie möglich zusammen.

a) $x + 3x$

b) $-3x + 7 + 8x$

c) $4 - x + 8 + 3x$

d) $3,5x - 5 + x + 12 - 0,5x$

Lösung:

a) $x + 3x = 1x + 3x = 4x$

b) $-3x + 7 + 8x = +5x + 7$ (Hinweis: Es ist $-3 + 8 = +5$)

c) $4 - x + 8 + 3x = 12 + 2x$ (Hinweis: Es ist $-x = -1x$)

d) $3,5x - 5 + x + 12 - 0,5x = (3,5 + 1 - 0,5)x + 7 = 4x + 7$

Auflösen von Klammern

- Klammerausdrücke wie $10(2x + 3)$ oder $(3x - 5) \cdot 4$ löst man auf, indem man jeden Summand in der Klammer mit der Zahl außerhalb der Klammer multipliziert. Es gilt:

$$10(2x + 3) = 10 \cdot 2x + 10 \cdot 3 \quad \text{bzw.} \quad (3x - 5) \cdot 4 = 3x \cdot 4 - 5 \cdot 4$$

Beachte: Zwischen der Klammer und der Zahl links vor der Klammer wird gewöhnlich der Malpunkt weggelassen. Den Malpunkt muss man sich dazu denken!

Es gilt: $10(2x + 3) = 10 \cdot (2x + 3)$

- Die Regel „**Punkt vor Strich**“: In einem Rechenausdruck müssen die Punktrechnungen (mal oder geteilt) vor den Strichrechnungen (plus oder minus) durchgeführt werden. Z.B. gilt: $4 - 3 \cdot 5 = 4 - 15 = -11$

- Man **multipliziert einen Term mit einer Zahl**, indem man den Vorfaktor des Terms mit der Zahl multipliziert. Es gilt:

$$a \cdot bx = (a \cdot b)x \quad \text{bzw.} \quad bx \cdot a = (a \cdot b)x$$



← Merke

Beispiel 3: Löse die Klammern auf.

a) $7(4x + 5)$ b) $(9x - 6) \cdot 2$ c) $8(4 - 3x)$ d) $12(x - 1)$

Lösung:

a) $7(4x + 5) = 7 \cdot 4x + 7 \cdot 5 = 28x + 35$ b) $(9x - 6) \cdot 2 = 9x \cdot 2 - 6 \cdot 2 = 18x - 12$

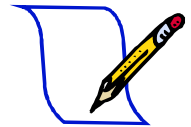
c) $8(4 - 3x) = 8 \cdot 4 - 8 \cdot 3x = 32 - 24x$ d) $12(x - 1) = 12 \cdot x - 12 \cdot 1 = 12x - 12$

3.2. Terme aufstellen:

Im Teil A1 kommt gelegentlich eine Aufgabe vor, bei der du mit einer „gedachten Zahl“ einen Term aufstellen sollst. Dazu musst du die „gedachte Zahl“ mit einer Variablen bezeichnen - in der Regel mit „x“.

Ganz wichtig ist dann, dass du die Rechenoperationen kennst, die den folgenden Ausdrücken entsprechen:

- 1.) „das Doppelte“ ; „das Dreifache“ ; usw. bedeuten „mal 2“ ; „mal 3“ usw.
„die Hälfte“ bedeutet „geteilt durch 2“.
- 2.) „addieren“ bzw. „dazu zählen“ bedeutet „plus“
- 3.) „subtrahieren“ bzw. „abziehen“ bedeutet „minus“
- 4.) „multiplizieren“ bedeutet „mal“
- 5.) „dividieren“ bedeutet „teilen“ bzw. „geteilt“
- 6.) „Summe“ bedeutet „plus“. „Differenz“ bedeutet „minus“
- 7.) „Produkt“ bedeutet „mal“; „Quotient“ bedeutet „geteilt“.



← Prüfung

Beispiel 4: Stelle jeweils den zugehörigen Term auf und fasse so weit wie möglich zusammen.

- a) Zu einer gedachten Zahl wird das Vierfache dieser Zahl addiert.
- b) Von einer gedachten Zahl wird das Doppelte dieser Zahl abgezogen.
- c) Das Doppelte einer gedachten Zahl wird durch das Doppelte von 5 geteilt.
- d) Zum Produkt der Zahlen 2 und 7 wird die Summe aus 5 und der gedachten Zahl addiert.

Lösung:

a) $x + 4x = 5x$

b) $x - 2x = -x$

c) $2x : (2 \cdot 5) = 2x : 10$

d) $2 \cdot 7 + (5 + x) = 14 + 5 + x = 19 + x$

3.3. Gleichungen lösen:



← **Merke**

- In einer Gleichung werden zwei Terme miteinander gleichgesetzt. Zum Beispiel $x + 4 = 6$ oder $2x + 1 = x - 5$. Die Lösung einer Gleichung ist dann diejenige Zahl, die man in die Variable einsetzen muss, damit eine wahre Aussage entsteht. Hinweis: In der Prüfung ist die Gleichungsvariable in der Regel „x“.
 - Die Schritte zur Lösung einer Gleichung sind folgende (siehe Beispiel 7):
 - 1.) Zuerst muss man die **Terme** auf beiden Seiten der Gleichung so weit wie möglich **vereinfachen**.
 - 2.) Anschließend bringt man alle Summanden mit Variable auf die **linke Seite** und alle anderen Summanden auf die **rechte Seite** der Gleichung. Dazu lässt man einen Summanden auf einer Seite „**verschwinden**“, indem man ihn mit **umgekehrtem** Rechenzeichen der anderen Seite anfügt (siehe Beispiele 5a und 6 und 7). Steht vor einem Summanden weder plus noch minus, ist immer plus gemeint.
 - 3.) Dann muss man beide Seiten der Gleichung wieder so weit wie möglich vereinfachen, sodass die Gleichung $cx = b$ bzw. $c \cdot x = b$ dasteht. Gleichungen der Art $cx = b$ haben immer die Lösung $x = b : c$ (siehe Beispiel 5b).
- Tipp:** Wenn c negativ ist wie in $-2x = 6$, sollte man links und rechts die Vorzeichen umdrehen. Man erhält dann die Gleichung $2x = -6$. Dann muss man nicht durch eine negative Zahl teilen (siehe Beispiele 5c und d).

Beispiel 5: Berechne jeweils die Lösung der Gleichung.

a) $x + 3 = 7$ b) $2x = 12$ c) $-3x = 6$ d) $-12x = 4$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } x + 3 &= 7 & | -3 \\ \Leftrightarrow x &= 7 - 3 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x &= 12 & | :2 \\ \Leftrightarrow x &= 12 : 2 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -3x &= 6 & | \text{ Vorzeichen umdrehen} \\ \Leftrightarrow 3x &= -6 & | :3 \\ \Leftrightarrow x &= -6 : 3 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -12x &= 4 & | \text{ Vorzeichen umdrehen} \\ \Leftrightarrow 12x &= -4 & | :12 \\ \Leftrightarrow x &= -4 : 12 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Hinweise:

Man kann in c) natürlich auch durch (-3) teilen: $x = 6 : (-3) = -2$

Man kann in d) natürlich auch durch (-12) teilen: $x = 4 : (-12) = -\frac{4}{12}$

Beispiel 6: Berechne die Lösung der Gleichung $3x + 4 = 2x + 8$.

Lösung:

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 2x + 8 & | -4 \\ \Leftrightarrow 3x &= 2x + 8 - 4 & | -2x \\ \Leftrightarrow 3x - 2x &= 8 - 4 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

Beispiel 7: Löse die Gleichung. $4(x + 3) = -2x + 4 + 4x$

Lösung:

1. Schritt: Vereinfachen der beiden Seiten

$$4 \cdot (x + 3) = -2x + 4 + 4x$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = -2x + 4 + 4x \quad | \text{ Es ist } -2x + 4x = +2x$$

$$\Leftrightarrow 4x + 12 = 4 + 2x$$

2. Schritt: Sortieren der x-Terme und der Zahlen

$$4x + 12 = 4 + 2x \quad | -2x$$

$$\Leftrightarrow 4x + 12 - 2x = 4 \quad | -12$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2x = 4 - 12$$

3. Schritt: Zusammenfassen beider Seiten und Berechnen des x-Werts

$$4x - 2x = 4 - 12$$

$$\Leftrightarrow 2x = -8 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow x = (-8) : 2 = -4$$

Ergebnis: Die Gleichung hat die Lösung $x = -4$.

Bei **Aufgaben zur Prozentrechnung** muss man oft Gleichungen der Art $\frac{p}{100} = a$ nach der Prozentzahl p umstellen. Die Lösung dieser Gleichung ist immer $p = a \cdot 100$.

$$\text{Denn es gilt: } \frac{p}{100} = a \quad | \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot 100 = a \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow p = a \cdot 100$$



← **Tip**

Beispiel 8: Bestimme jeweils die Prozentzahl p .

a) $\frac{p}{100} = 0,25$ b) $\frac{p}{100} = 0,8$ c) $\frac{p}{100} = 0,075$

Lösung:

a) $\frac{p}{100} = 0,25 \quad | \cdot 100$ b) $\frac{p}{100} = 0,8 \quad | \cdot 100$ c) $\frac{p}{100} = 0,075 \quad | \cdot 100$

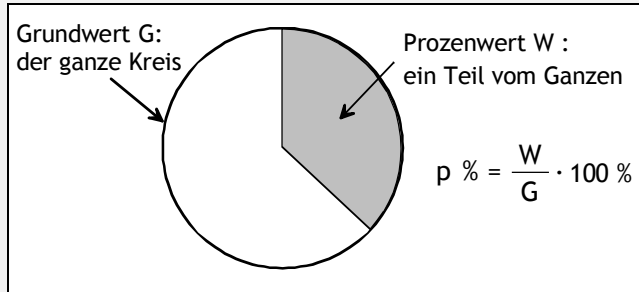
$\Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot 100 = 0,25 \cdot 100$ $\Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot 100 = 0,8 \cdot 100$ $\Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot 100 = 0,075 \cdot 100$

$\Leftrightarrow p = 25$ $\Leftrightarrow p = 80$ $\Leftrightarrow p = 7,5$

4. Prozent- und Zinsrechnung

4.1. Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert:

Der **Grundwert G** ist immer das Ganze, der **Prozentwert W** ist ein Teil von diesem Ganzen, und der **Prozentsatz p %** beschreibt den Anteil des Prozentwerts am Grundwert als Bruch. p wird **Prozentsatz** genannt. Das Prozentzeichen „%“ steht für die Rechenoperation geteilt.



← Merke

Verschiedene Lösungsmöglichkeiten für Aufgaben zur Prozentrechnung:

Bei Aufgaben zur Prozentrechnung muss immer eine der drei Größen **Prozentwert W**, **Grundwert G** und **Prozentsatz p % = $\frac{P}{100}$** berechnet werden. Dazu gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten:



← Tipps

1.) Rechnen mit Brüchen:

Man kann einen Prozentsatz p % oder einen Prozentwert W auch leicht mit Hilfe der Bruchrechnung bestimmen. Zur Berechnung eines Grundwerts G muss man allerdings ein anderes Verfahren wählen.

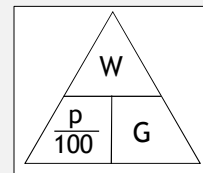
- Wenn p % und G bekannt sind, muss man $p \% = \frac{P}{100}$ von G berechnen. Also $\frac{P}{100} \cdot G$.
- Wenn W und G bekannt sind, muss man den Bruch $\frac{W}{G}$ lediglich in eine Prozentzahl p umwandeln. Dazu wandelt man den Quotienten $W : G$ (mit dem Taschenrechner) in eine Dezimalzahl um und multipliziert das Ergebnis mit 100. Es gilt: $p = (W : G) \cdot 100$.

2.) Das „Formeldreieck“ der Prozentrechnung:

Mit Hilfe des folgenden „Formeldreiecks“ kannst du bequem eine der drei Größen p, W oder G berechnen, wenn zwei dieser drei Größen bekannt sind.

Der Trick geht dabei so:

Wenn du im Formeldreieck die gesuchte Größe abdeckst, zeigt dir das Formeldreieck die Formel an, wie du die gesuchte Größe berechnen kannst. Durch Einsetzen der bekannten Werte in die Formel erhältst du dann den gesuchten Wert.



- Wenn beispielsweise p und G bekannt sind, deckst du die gesuchte Größe W ab.

Zur Berechnung von W musst du dir dann nur noch zwischen $\frac{P}{100}$ und G einen Malpunkt denken. Es gilt: $W = \frac{P}{100} \cdot G$

- Wenn beispielsweise W und G bekannt sind, deckst du die gesuchte Größe $\frac{P}{100}$ ab.

Das Formeldreieck zeigt dann den Bruch $\frac{W}{G}$ an. Es gilt also: $\frac{P}{100} = \frac{W}{G}$.

Entsprechend gehst du vor, wenn p und W bekannt sind. (→ weiter mit 3. auf S. 26)



← Tipps

3.) Lösung mit einer Dreisatzrechnung:

Wenn man eine der drei Größen p , G oder W mit Hilfe einer Dreisatzrechnung bestimmen will, muss man von folgenden Beziehungen ausgehen:

$G \hat{=} 100 \%$, wenn G und W bekannt sind und man auf Beziehung $W \hat{=} p \%$ schließen will.

$100 \% \hat{=} G$, wenn G und $p \%$ bekannt sind und man auf $p \% \hat{=} W$ schließen will.

$p \% \hat{=} W$, wenn W und $p \%$ bekannt sind und man auf $100 \% \hat{=} G$ schließen will.

Hinweis:

Bei Berechnungen mit einem Dreisatz kann es etwas knifflig sein, immer den richtigen Ansatz zu finden. Es ist daher oft klüger, einen anderen Lösungsweg zu wählen (s.o.).

Beispiel 1:

25 % der 32 Schüler einer Klasse haben ein Haustier. Wie viele Schüler/innen sind das ?

Lösung:

Bekannt sind $p = 25$ und $G = 32$ Schüler. Gesucht ist der Prozentwert W .

Indem man im „Formeldreieck“ den Prozentwert W abdeckt, erhält man die Formel $W = \frac{p}{100} \cdot G$.

Einsetzen von $p = 25$ und $G = 32$ ergibt: $W = \frac{25}{100} \cdot 32 \text{ Schüler} = 8 \text{ Schüler}$

Hinweis: Man hätte auch $\frac{25}{100}$ von 32 Schüler $= \frac{25}{100} \cdot 32 \text{ Schüler} = 8 \text{ Schüler}$ rechnen können.

Beispiel 2:

Von 120 kontrollierten Autofahrern waren 48 Autofahrer zu schnell. Wie viel Prozent waren das ?

Lösung:

Bekannt sind $W = 48$ Autofahrer und $G = 120$ Autofahrer. Gesucht ist die Prozentzahl p bzw. der Prozentsatz $p \%$.

Indem man im „Formeldreieck“ den Bruch $\frac{p}{100}$ abdeckt, erhält man die Formel $\frac{p}{100} = \frac{W}{G}$.

Einsetzen von $W = 48$ Autofahrer und $G = 120$ Autofahrer ergibt:

$$\frac{p}{100} = \frac{48}{120}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{100} = 0,4 \quad | \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow p = 0,4 \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow p = 40 \text{ bzw. } p \% = 40 \%$$

Hinweis: Man hätte auch den Bruch $\frac{48}{120}$ als Prozentsatz schreiben können:

$$p = \frac{48}{120} \cdot 100 = (48 : 120) \cdot 100 = 40 \text{ und damit } p \% = 40 \%$$

Beispiel 3:

Die Klasse 9a hat von ihren Einnahmen eines Schulfests 90 € für einen wohltätigen Zweck gespendet. Das waren 15 % der Gesamteinnahmen. Wie viel Euro hat die Klasse 9a bei dem Schulfest eingenommen ?

Lösung:

Bekannt sind $W = 90$ € und $p = 15$ bzw. $p/100 = 0,15$. Gesucht ist der Grundwert G .

Indem man im „Formeldreieck“ den Grundwert G abdeckt, erhält man die Formel $G = \frac{W}{p/100}$.

Einsetzen von $p/100 = 0,15$ und $W = 90$ € ergibt: $G = \frac{90 \text{ €}}{0,15} = 600 \text{ €}$.

4.2. Der verringerte Grundwert:

Wenn man eine Größe wie zum Beispiel den Preis einer Ware um einen bestimmten Betrag verringert, erhält man einen neuen Wert dieser Größe.

Der **ursprüngliche Wert** der Größe ist immer der **Grundwert**.

Der **Unterschied** zwischen dem alten und neuen Wert der Größe ist der **Prozentwert W**.



← **Merke**

Beispiel 4: Um wie viel Prozent wurde der Preis des Fahrrads reduziert ?

alter Preis
~~1800 €~~



neuer Preis
1260 €

Lösung:

Der Grundwert ist $G = 1800 \text{ €}$.

Der Prozentwert ist der Unterschied zwischen altem und neuem Preis: $W = 1800 \text{ €} - 1260 \text{ €} = 540 \text{ €}$

Gesucht ist der Prozentsatz $p \%$, der dem Prozentwert $W = 540 \text{ €}$ entspricht.

Einsetzen von $W = 540 \text{ €}$ und $G = 1800 \text{ €}$ in die Formel $\frac{p}{100} = \frac{W}{G}$ ergibt:

$$\frac{p}{100} = \frac{540 \text{ €}}{1800 \text{ €}} \quad | \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{540 \text{ €}}{1800 \text{ €}} \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow p = 30 \text{ bzw. } p \% = 30 \%$$

Beispiel 5:

Wie viel kosten die Stiefel nach dem Preisnachlass ?

Lösung:

Der Grundwert ist $G = 95,00 \text{ €}$.

Der Prozentsatz, um den reduziert wird, ist $p \% = 25 \%$.

Der Betrag, um den der ursprüngliche Preis verringert wird, ist der Prozentwert W .

Einsetzen von $G = 95 \text{ €}$ und $p = 25$ in die Formel $W = \frac{p}{100} \cdot G$ ergibt: $W = \frac{25}{100} \cdot 95 \text{ €} = 23,75 \text{ €}$

Nach dem Preisnachlass ist der neue Preis der Stiefel somit: $95,00 \text{ €} - 23,75 \text{ €} = 71,25 \text{ €}$

REDUZIERT

25 %
AUF ALLES

bisher
95,00 €



4.3. Geschachtelte Aufgaben der Prozentrechnung:

In manchen Aufgaben des Wahlteils kommen Aufgaben zur Prozentrechnung vor, die man in **zwei Schritten** lösen muss. Dabei muss der **Prozentwert des ersten Schritts** als **Grundwert für den zweiten Schritt** der Berechnung betrachtet werden (siehe Beispiel 6).

Tipp: Geschachtelte Prozentaufgaben erkennt man oft daran, dass im Aufgabentext zwei Prozentsätze angegeben sind und dass ein Teil eines Ganzen noch einmal geteilt werden soll.



← **Prüfung**

Beispiel 6:

Der Jahrgang einer Abschlussklasse umfasst 80 Jugendliche. Davon sind 60 % Mädchen. Von den Mädchen spielen 25 % ein Musikinstrument. Wie viele Mädchen sind das ?

Lösung:

• Im ersten Schritt muss man berechnen, wie viele Mädchen es in der Abschlussjahrgang gibt. Das ist der erste gesuchte Prozentwert **W**.

Einsetzen von $p = 60$ und $G = 80$ Jugendliche in die Formel $W = \frac{p}{100} \cdot G$ ergibt: $W = \frac{60}{100} \cdot 80 = 48$ Mädchen

In dem Jahrgang gibt es also 48 Mädchen.

• Im zweiten Schritt muss man nun diesen Wert als neuen Grundwert betrachten: $G_{\text{neu}} = 48$ Mädchen

Laut Aufgabentext spielen 25 % davon ein Musikinstrument. Der Prozentsatz ist nun also $p^* \% = 25 \%$.

Einsetzen von $p^* = 25$ und $G = 48$ Mädchen in die Formel $W_{\text{neu}} = \frac{p^*}{100} \cdot G_{\text{neu}}$ ergibt:

$$W_{\text{neu}} = \frac{25}{100} \cdot 48 \text{ Mädchen} = 12 \text{ Mädchen}$$

Im Jahrgang der Abschlussklasse spielen **12 Mädchen** ein Musikinstrument.

4.4. Zinsrechnung

Aufgaben zur Zinsrechnung müssen mit Hilfe der Prozentrechnung gelöst werden. Dabei solltest du dir folgende Begriffe merken:

- Der **Zinssatz** ist immer der Prozentsatz $p \%$.
- Der angelegte Geldbetrag ist immer der **Grundwert G** und wird auch **Kapital** genannt. Wenn der Geldbetrag von einer Bank *geliehen* wird, spricht man von einem **Darlehen** oder **Kredit**. Dann ist eben dieser Darlehen bzw. dieser Kredit der Grundwert G.
- **Zinsen** sind immer der Prozentwert W und werden für 1 Jahr berechnet, falls nichts anderes angegeben ist. Die Zinsen sind der Geldbetrag, um den sich das angelegte Geld vermehrt.
- Mit dem Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ kann man das Kapital K_1 nach einem Jahr sehr leicht berechnen. Es gilt: $K_1 = G \cdot q$ bzw. $K_1 = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
- Falls nach den **Zinsen** für 1 Monat gefragt ist, muss man die Zinsen für 1 Jahr durch 12 teilen.



← Merke

Beispiel 7:

Für ihren Hausbau nimmt Familie Schreiner bei ihrer Bank einen Kredit in Höhe von 150 000 € auf.

Wie viel Euro Zinsen muss Familie Schreiner im ersten Monat zahlen, wenn der Zinssatz bei 2,5 % liegt ?

Lösung:

Zunächst muss man die Zinsen für *ein* Jahr berechnen. Das ist der Prozentwert W.

Einsetzen von $p = 2,5$ und $G = 150\,000$ € in die Formel $W = \frac{p}{100} \cdot G$ ergibt:

$$W = \frac{2,5}{100} \cdot 150\,000 \text{ €} = 3750 \text{ €}$$

Das sind die Zinsen für *ein* Jahr. Im ersten *Monat* muss Familie Schreiner also $3750 \text{ €} : 12 = 312,50 \text{ €}$ bezahlen.

Berechnungen bei Zinseszins

Wenn ein Geldbetrag über mehrere Jahre angelegt wird und die Zinsen am Jahresende zum Kapital hinzugezählt werden, spricht man von **Zinseszins**.

Zur besseren Übersicht sollte man sich die Entwicklung des Kapitals in folgender Tabelle veranschaulichen (hier für 3 Jahre mit den Zinssätzen 1,5 %; 2,0 % und 2,5 %):

Jahre	Kapital am Jahresanfang	Zinsfaktor q	Kapital am Jahresende	Zinsen
1.	1500 €	1,015		
2.		1,02		
3.		1,025		

Folgende Regeln sollte man sich zum Ausfüllen der Tabelle merken:

- Das jeweilige Kapital am Ende eines Jahres erhält man, indem das Kapital am Jahresanfang mit dem Zinsfaktor q multipliziert.
- Das Kapital an einem Jahresende ist gleich dem Kapital am Jahresanfang des Folgejahrs.
- Die Zinsen eines Jahres sind die Differenz zwischen dem Kapital am Jahresende und dem Kapital am Jahresanfang.



← **Merke**

Beispiel 8:

Berechne aus dem angegebenen Prozentsatz den Zinsfaktor q.

- a) p % = 3 % b) p % = 4,5 % c) p % = 1,25 % d) p % = 0,75 %

Lösung:

Mit der Formel $q = 1 + \frac{p}{100}$ erhält man jeweils:

- a) q = 1,03 b) q = 1,045 c) q = 1,0125 d) q = 1,0075

Beispiel 9:

Frau Müller legt 1500 € für 3 Jahre bei ihrer Bank an. Die Bank bietet folgende Zinssätze an:

1. Jahr: 1,5 % ; 2. Jahr: 2,0 % ; 3. Jahr: 2,5 %

- Wie viele Zinsen bekommt Frau Müller insgesamt ?
- Auf welchen Betrag ist ihr Startkapital angestiegen ?

Lösung:

Zunächst muss man die drei Zinsfaktoren berechnen. Man erhält: $q_1 = 1,015$; $q_2 = 1,02$ und $q_3 = 1,025$
Die Entwicklung des Kapitals sieht dann so aus:

Jahre	Kapital am Jahresanfang	Zinsfaktor q	Kapital am Jahresende	Zinsen
1.	1500 €	1,015	1522,50 €	22,50 €
2.	1522,50 €	1,02	1552,95 €	30,45 €
3.	1552,95 €	1,025	1591,77 €	38,82 €

Berechnungen:

1. Jahr: $1500 \text{ €} \cdot 1,015 = 1522,50 \text{ €}$
 2. Jahr: $1522,50 \text{ €} \cdot 1,02 = 1552,95 \text{ €}$
 3. Jahr: $1552,95 \text{ €} \cdot 1,025 = 1591,77 \text{ €}$

Frau Müller bekommt insgesamt **91,77 € Zinsen** (= 1591,77 € – 1500 €).

Ihr Kapital ist nach den 3 Jahren auf **1591,77 €** angestiegen.

4.5. Prozentsätze in Diagrammen:

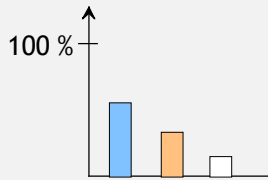


← **Merke**

Prozentuale Verteilungen kann man in Diagrammen darstellen. Wenn man ein Säulen-, Balken- oder Streifendiagramm zeichnen soll, sollte man für **100 % die Länge 100 mm** wählen. Dann entspricht 1 % der Länge 1 mm.

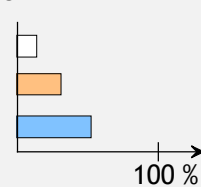
• **Säulendiagramm:**

Die einzelnen Prozentsätze werden als senkrechte Säulen dargestellt.



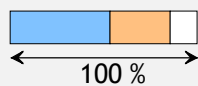
• **Balkendiagramm:**

Die einzelnen Prozentsätze werden als waagrechte Balken dargestellt.



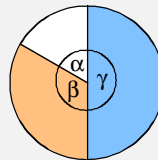
• **Streifendiagramm:**

Die einzelnen Prozentsätze werden in einem Streifen dargestellt.



• **Kreisdiagramm:**

Die einzelnen Prozentsätze werden als Kreisabschnitte dargestellt.



Beachte:

In einem Kreisdiagramm gilt: $100 \% \hat{=} 360^\circ$ bzw. $1 \% \hat{=} 3,6^\circ$.

Den Mittelpunktswinkel α eines Kreisabschnitts zum Prozentsatz $p \%$ erhält man also, indem man p mit $3,6^\circ$ multipliziert: $\alpha = 3,6^\circ \cdot p$

Beispiel 10:

In einer Tüte Gummibärchen befinden sich 15 rote, 35 gelbe und 60 grüne Gummibärchen. Stelle die prozentuale Verteilung

- a) in einem Säulendiagramm
 - b) in einem Balkendiagramm
 - c) in einem Streifendiagramm
 - d) in einem Kreisdiagramm
- dar.

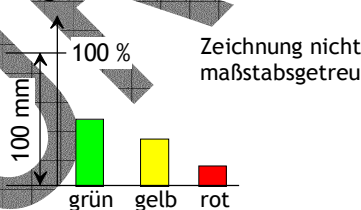
Lösung:

Insgesamt sind 100 Gummibärchen in der Tüte. Also sind die Prozentsätze:

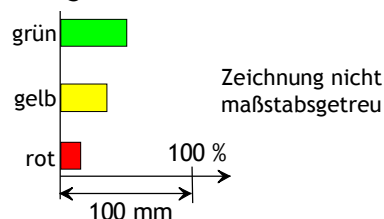
$p_{rot} = 15 \% ; p_{gelb} = 35 \%$ und $p_{grün} = 50 \%$

Die zugehörigen Längen bzw. Höhen sind: rot: 15 mm ; gelb: 35 mm ; grün: 50 mm

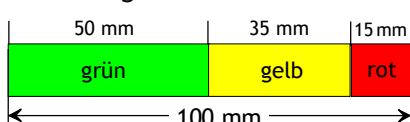
Säulendiagramm:



Balkendiagramm:



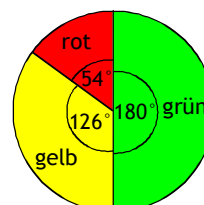
Streifendiagramm:



Zeichnung nicht maßstabsgetreu

Kreisdiagramm:

$15 \% \cdot 3,6^\circ = 54^\circ$
 $35 \% \cdot 3,6^\circ = 126^\circ$
 $50 \% \cdot 3,6^\circ = 180^\circ$



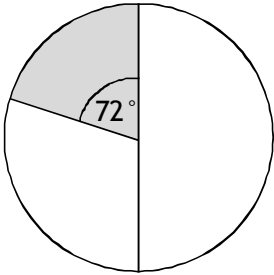
Prozentsätze aus dem Mittelpunktswinkel eines Kreisausschnitts bestimmen

Wenn man einen Prozentsatz anhand des Mittelpunktswinkel α eines Kreisausschnitts bestimmen soll, muss man einfach den Bruch $\frac{\alpha}{360}$ bilden. Das ist der Anteil des Kreisausschnitts am gesamten Kreis als Bruch.

Die zugehörige Prozentzahl p ist dann $p = \frac{\alpha}{360} \cdot 100$ bzw. $p \% = \frac{\alpha}{360} \cdot 100 \% .$

← **Merke****Beispiel 11:**

Welcher Prozentsatz entspricht dem markierten Kreisausschnitt ?

**Lösung:**

Der Bruchteil am ganzen Kreis (360°) ist $\frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{72}{360} .$

Die zugehörige Prozentzahl ist $p = \frac{72}{360} \cdot 100 = 20$ bzw. $p \% = 20 \% .$

Brüche mit dem Taschenrechner in Prozentsätze umwandeln

Du kannst einen **Bruch in einen Prozentsatz** umwandeln, indem du einfach den Zähler durch den Nenner teilst und das Ergebnis mit 100 multiplizierst. Du erhältst so die zugehörige Prozentzahl p . Anschließend musst du nur noch das Prozentzeichen anfügen.

Beim Bruch $\frac{72}{360}$ ist die Tastenfolge auf dem Taschenrechner:

$$\boxed{72} \longrightarrow \boxed{\div} \longrightarrow \boxed{360} \longrightarrow \boxed{\times} \longrightarrow \boxed{100} \longrightarrow \boxed{=}$$

Hinweise:

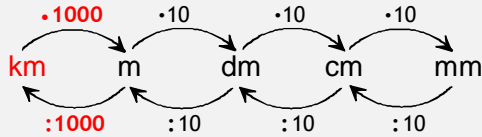
- Die Mal-Taste ist auf den meisten Taschenrechner das „x“.
- Bei den Zahlen „72“, „360“ und „100“ musst du die Ziffern natürlich einzeln von links nach rechts eintippen. Hier wurde zur besseren Übersicht abgekürzt.

← **Tipp**

5. Größen und Winkel

5.1. Längeneinheiten:

Zwei benachbarte Längeneinheiten werden mit Hilfe des **Faktors 10** ineinander umgerechnet. Die einzige **Ausnahme** ist der Sprung zwischen Meter und **Kilometer**:



← Merke

Beispiel 1:

Ergänze die Lücken.

a) $0,8 \text{ m} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$

b) $75 \text{ mm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}$

c) $0,125 \text{ km} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$

d) $250\,000 \text{ dm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ km}$

Lösung:

a) Von Meter (m) zu Zentimeter (cm) muss man zweimal nacheinander mit 10 multiplizieren.

Es gilt: $0,8 \text{ m} = 0,8 \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm} = \mathbf{80 \text{ cm}}$

b) Von Millimeter (mm) zu Dezimeter (dm) muss man zweimal nacheinander durch 10 teilen.

Es gilt: $75 \text{ mm} = 75 : 10 : 10 \text{ dm} = \mathbf{0,75 \text{ dm}}$

c) Von Kilometer (km) zu Zentimeter (cm) muss man zuerst mit 1000 multiplizieren und dann noch zweimal nacheinander mit 10.

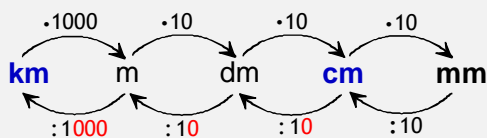
Es gilt: $0,125 \text{ km} = 0,125 \cdot \mathbf{1000} \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm} = \mathbf{12\,500 \text{ cm}}$

d) Von Dezimeter (dm) zu Kilometer (km) muss man erst einmal durch 10 teilen und dann noch einmal durch 1000 teilen.

Es gilt: $250\,000 \text{ dm} = 250\,000 : 10 : 1000 \text{ km} = \mathbf{25 \text{ km}}$

- Wenn man die Nullen aller Umrechnungsfaktoren zählt, kann man sich die schrittweise Multiplikation bzw. Division ersparen. Beispielsweise kann man Zentimeter in Kilometer umrechnen, indem man die Zentimeter-Maßzahl durch **100 000** (fünf Nullen) teilt.

Zum Beispiel: $750\,000 \text{ cm} = 750\,000 : 100\,000 \text{ km} = 7,5 \text{ km}$



- Ganz übersichtlich wird die Umwandlung in eine andere Maßeinheit, wenn man jeden Schritt zur nächsten Einheit extra aufschreibt. Zum Beispiel:

$$750\,000 \text{ cm} = 75000 \text{ dm} = 7500 \text{ m} = 7,5 \text{ km}$$

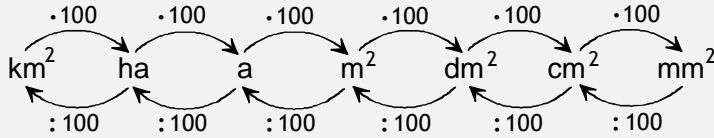
(Das ist allerdings mit etwas Schreibaufwand verbunden.)



← Tipp

5.2. Flächeneinheiten:

Zwei benachbarte Flächeneinheiten werden mit dem **Faktor 100** ineinander umgerechnet. Hinweis: $1a = 1 \text{ Ar} = 100 \text{ m}^2$ und $1 \text{ ha} = 1 \text{ Hektar} = 100a = 10000 \text{ m}^2$:



Tip: Man kann sich den Faktor 100 für Flächeneinheiten so merken: Alle Flächeneinheiten haben hinten ein „hoch 2“ (außer a und ha). Die „2“ gibt die Anzahl der Nullen in dem Umrechnungsfaktor 100 an.



← Merke

Beispiel 2: Ergänze die Lücken.

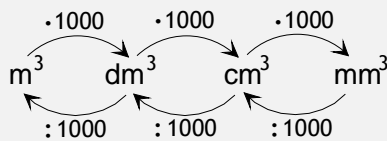
- a) $12500 \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$
- b) $5\,500\,000 \text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ km}^2$
- c) $0,75 \text{ km}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$
- d) $3,6 \text{ dm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$

Lösung:

- a) Von cm^2 zu m^2 muss man zweimal nacheinander durch 100 teilen.
Es gilt: $12500 \text{ cm}^2 = 12500 : 100 : 100 \text{ m}^2 = 1,25 \text{ m}^2$
- b) Von m^2 zu km^2 muss man dreimal nacheinander durch 100 teilen.
Es gilt: $5\,500\,000 \text{ m}^2 = 5\,500\,000 : 100 : 100 : 100 \text{ km}^2 = 5,5 \text{ km}^2$
- c) Von km^2 zu m^2 muss man dreimal nacheinander mit 100 multiplizieren.
Es gilt: $0,75 \text{ km}^2 = 0,75 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 750000 \text{ m}^2$
- d) Von dm^2 zu mm^2 muss man zweimal nacheinander mit 100 multiplizieren.
Es gilt: $3,6 \text{ dm}^2 = 3,6 \cdot 100 \cdot 100 \text{ mm}^2 = 36000 \text{ mm}^2$

5.3. Volumeneinheiten:

Zwei benachbarte Volumeneinheiten werden mit dem **Faktor 1000** ineinander umgerechnet. Hinweis: $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ Liter}$



Tip: Man kann sich den Faktor 1000 für Volumeneinheiten so merken: Alle Volumeneinheiten haben hinten ein „hoch 3“. Die „3“ gibt die Anzahl der Nullen in dem Umrechnungsfaktor 1000 an.



← Merke

Beispiel 3: Ergänze die Lücken.

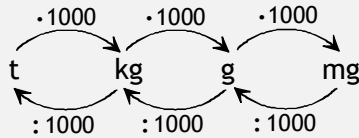
- a) $4200 \text{ cm}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^3$
- b) $2,5 \text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$
- c) $225 \text{ Liter} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^3$
- d) $0,25 \text{ dm}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

Lösung:

- a) $4200 \text{ cm}^3 = 4200 : 1000 \text{ dm}^3 = 4,2 \text{ dm}^3$
- b) $2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \cdot 1000 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 2\,500\,000 \text{ cm}^3$
- c) $225 \text{ Liter} = 225 : 1000 \text{ m}^3 = 0,225 \text{ m}^3$
- d) $0,25 \text{ dm}^3 = 0,25 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 250 \text{ cm}^3$

5.4. Gewichte (Massen):

Zwei benachbarte Gewichtseinheiten werden mit dem **Faktor 1000** ineinander umgerechnet.



Hinweis: Physikalisch korrekt muss „Gewicht“ als „Masse“ bezeichnet werden. Der Begriff „Gewicht“ ist umgangssprachlich.



← Merke

Beispiel 4: Ergänze die Lücken.

a) 6800 kg = _____ t

b) 5,2 kg = _____ g

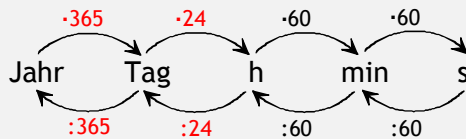
Lösung:

a) 6800 kg = 6800 : 1000 t = 6,8 t

b) 5,2 kg = 5,2 · 1000 g = 5200 g

5.5. Zeiteinheiten:

Zwei benachbarte Zeiteinheiten werden mit dem **Faktor 60** ineinander umgerechnet. Ausnahmen sind die Umrechnungen zwischen Tag und Stunde und zwischen Jahr und Tag.



Merke: 1 Jahr hat 365 Tage. Und 1 Tag hat 24 Stunden. Die Abkürzung für Stunde ist „h“ (englisch „hour“ für „Stunde“).



← Merke

Beispiel 5: Ergänze die Lücken.

a) 1 Tag = _____ min

b) 1 Jahr = _____ s ; runde das Ergebnis auf die Mio.-Stelle

c) 7200 s = _____ min

d) 4572 min = _____ h _____ min

Lösung:

a) 1 Tag = 1 · 24 · 60 min = 1440 min

b) 1 Jahr = 1 · 365 · 24 · 60 · 60 s = 31 536 000 s ≈ 32 Mio. Sekunden

c) 7200 s = 7200 : 60 min = 120 min

d) 4572 min = 76,2 h = 76 h 12 min

Gemischte Zeitangaben mit dem Taschenrechner bestimmen

Wenn man ein Zeitmaß, das als Dezimalzahl angegeben ist, in gemischte Zeiteinheiten umwandeln soll, geht man mit dem Taschenrechner folgendermaßen vor:

Man zerlegt die Dezimalzahl in eine ganze Zahl und eine Dezimalzahl „0,...“.

Anschließend multipliziert man die Dezimalzahl „0,...“ mit dem Umrechnungsfaktor zur nächstkleineren Einheit. Z.B. ist: 76,2 h = 76 h + 0,2 h.

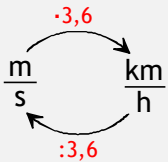
Mit 0,2 h = 0,2 · 60 min = 12 min erhält man: 76,2 h = 76 h 12 min.



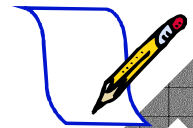
← Tipp

Einheiten von Geschwindigkeiten

Die häufigsten Einheiten für eine Geschwindigkeit sind $\frac{m}{s}$ (Meter pro Sekunde) und $\frac{km}{h}$ (Kilometer pro Stunde). Der Umrechnungsfaktor zwischen beiden Einheiten ist 3,6. Das solltest du dir für die Prüfung auswendig merken ! Denn so kannst du eine aufwändige Umrechnung mit Hilfe einer Dreisatzrechnung vermeiden.



Zum Beispiel entspricht eine Geschwindigkeit von $5 \frac{m}{s}$ der Geschwindigkeit $(3,6 \cdot 5) \frac{km}{h} = 18 \frac{km}{h}$.



← Prüfung

5.6. Uhrzeit und Zeitdauer:

- Die Zeitspanne zwischen zwei Uhrzeiten gibt man gewöhnlich in Stunden (h) und Minuten (min) an.
 - Wenn die Minutenzahl der Endzeit *größer* ist als die Minutenzahl der Startzeit, sollte man zuerst die Differenz zwischen den ganzen Stunden berechnen (siehe Beispiel 6a).
 - Wenn die Minutenzahl der Endzeit *kleiner* ist als die Minutenzahl der Startzeit, sollte man schrittweise über die vollen Stunden rechnen (siehe Beispiel 6b).
- Wenn man zu einer Uhrzeit eine Zeitspanne dazuzählt, sollte man zuerst die ganzen Stunden dazuzählen. Anschließend addiert man die Minutenzahl. Wenn man dabei über eine volle Stunde geht, muss man schrittweise addieren (siehe Beispiel 7).



← Tipp

Beispiel 6:

Welche Zeitspanne liegt zwischen den beiden Uhrzeiten ?

- a) Zwischen 8:15 Uhr und 12:30 Uhr b) Zwischen 11:45 Uhr und 17:20 Uhr

Lösung:

a) Wegen $12 - 8 = 4$ kann man zu 8:15 Uhr gleich **4 Stunden** dazuzählen. Man landet bei 12:15 Uhr. Zwischen 12:15 Uhr und 12:30 Uhr sind es noch **15 Minuten**. Also beträgt die Zeitspanne zwischen 8:15 Uhr und 12:30 Uhr genau 4 Stunden und 15 Minuten = **4 h 15 min**.

b) Wenn man schrittweise über die vollen Stunden rechnet, erhält man:

Von 11:45 Uhr bis 12:00 Uhr sind es **15 Minuten**.

Von 12:00 Uhr bis 17:00 Uhr sind es **5 Stunden**.

Von 17:00 Uhr bis 17:20 Uhr sind es **20 Minuten**.

Insgesamt sind das: 5 Stunden + 35 Minuten = **5 h 35 min**.

Beispiel 7:

Die Klasse 9a trifft sich um 8:45 Uhr zu einer Klassenfahrt. Nach 8 h 25 min kommt die Klasse 9a wieder zurück. Um wie viel Uhr ist die Klassenfahrt beendet ?

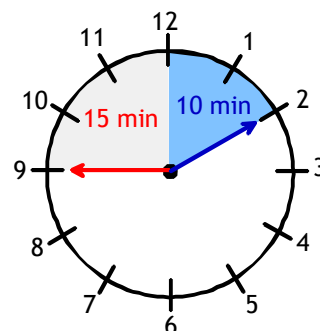
Lösung:

Wenn man zu 8:45 Uhr die 8 Stunden dazuzählt, landet man bei 16:45 Uhr (wegen $8 + 8 = 16$).

Anschließend muss man noch 25 Minuten dazuzählen:

Von 16:45 Uhr bis 17:00 Uhr sind es 15 min. Von den 25 min bleiben also noch $25 \text{ min} - 15 \text{ min} = 10 \text{ min}$ übrig. Die Uhrzeit, wann die Klassenfahrt endet, ist also **17:10 Uhr**.

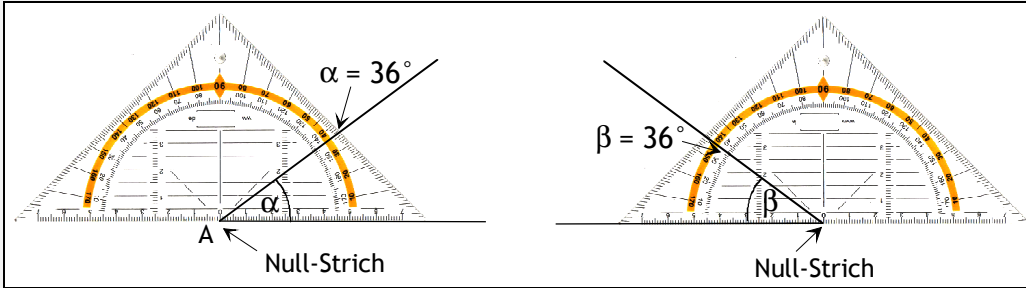
Hinweis: Du kannst dir das auch gut mit Hilfe des Minutenzeigers an einem Ziffernblatt veranschaulichen (siehe rechts).



16:45 Uhr plus 25 min

5.7. Winkel messen und zeichnen:

Wenn du einen **Winkel** zwischen zwei Linien **messen** willst, musst du das Geodreieck so anlegen, wie im Folgenden abgebildet:



Auf jedem Geodreieck sind immer zwei Skalen vorhanden. Je nach Lage des Geodreiecks muss man an der einen oder der anderen Skala ablesen (siehe Abbildung).
 Achte dabei darauf, ob es sich jeweils um einen spitzen Winkel ($\alpha < 90^\circ$) oder um einen stumpfen Winkel ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) handelt. Damit kannst du überprüfen, ob du den Winkel an der richtigen Skala abgelesen hast.
 (In der Abbildung sind zwei spitze Winkel abgebildet.)



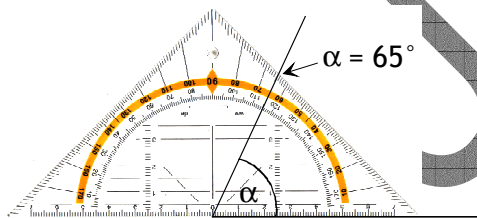
← Merke

Beispiel 8:

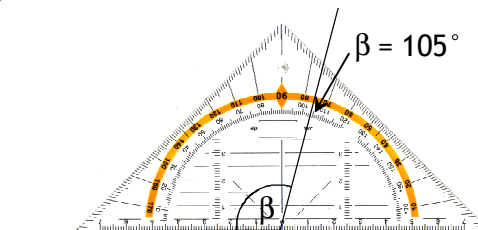
Miss die Winkel α und β :



Lösung:

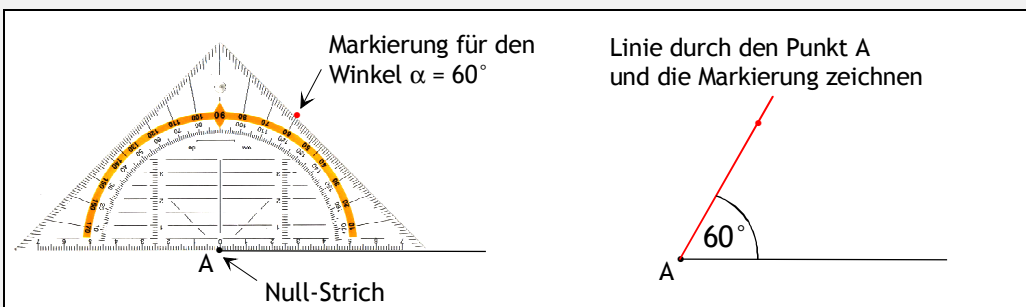


Der Winkel α ist ein spitzer Winkel.



Der Winkel β ist ein stumpfer Winkel.

Wenn du einen **Winkel** an eine vorgegebene Linie **zeichnen** willst, solltest du das Geodreieck zuerst so anlegen, wie im Folgenden abgebildet ist. Anschließend markierst du den gewünschten Winkel an der richtigen Skala und zeichnest den zweiten Schenkel des Winkels:



Achte auch hier darauf, ob es sich um einen spitzen Winkel ($\alpha < 90^\circ$) oder um einen stumpfen Winkel ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) handelt. Damit kannst du überprüfen, ob du den Winkel an der richtigen Skala markiert hast.

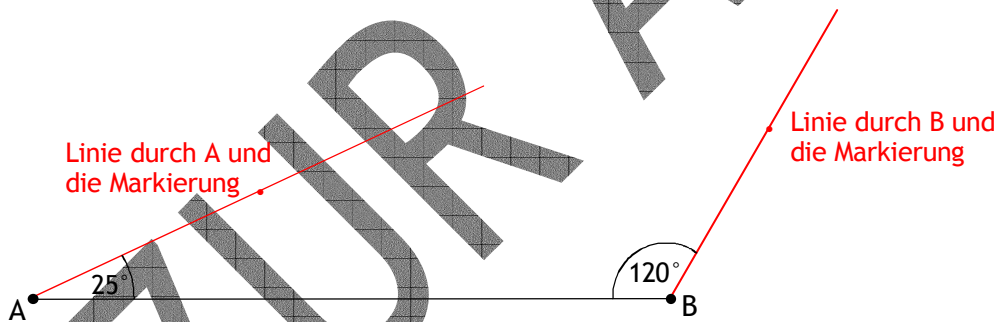
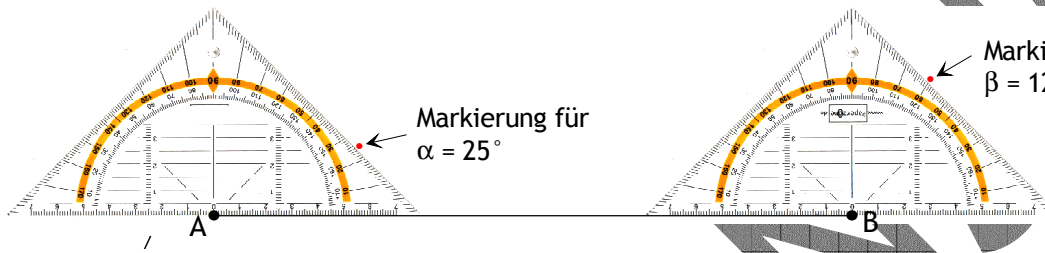


← Merke

Beispiel 9:

Zeichne den Winkel $\alpha = 25^\circ$ an den Punkt A, und den Winkel $\beta = 120^\circ$ den Punkt B.
 Trage die Linien oberhalb der Strecke AB ab.

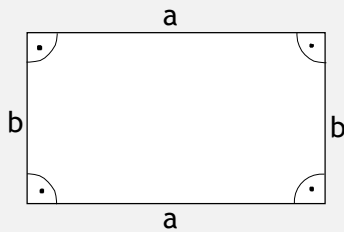
Lösung:



6. Flächen und Körper

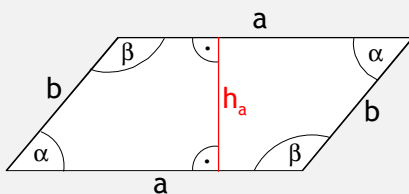
6.1. Flächeninhalt und Umfang:

Rechteck:



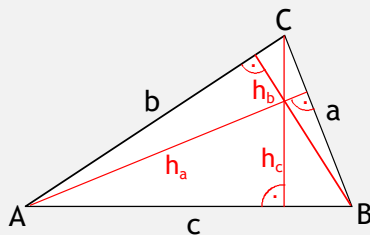
Flächeninhalt $A = a \cdot b$;
Umfang $u = 2a + 2b$

Parallelogramm:



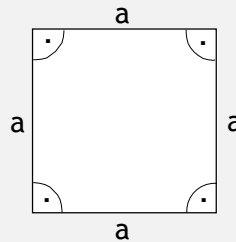
Flächeninhalt $A = a \cdot h_a$
Umfang $u = 2a + 2b$

Dreieck:



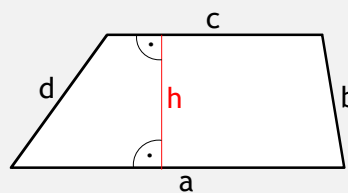
Flächeninhalt:
 $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$; $A = \frac{1}{2} b \cdot h_b$; $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a$
Umfang $u = a + b + c$

Quadrat:



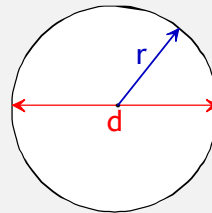
Flächeninhalt: $A = a \cdot a = a^2$
Umfang $u = 4a$

Trapez:



Flächeninhalt: $A = a \cdot h$
Umfang $u = a + b + c + d$

Kreis:



Flächeninhalt:
 $A = \pi \cdot r^2$; mit $\pi \approx 3,14$
Umfang $u = 2\pi \cdot r$ oder $u = \pi \cdot d$
Radius $r = 0,5d$

Tipp: Der Umfang einer eckigen Figur ist immer die Summe aller Seitenlängen.

Beispiel 1: Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der Figur.

a) Rechteck mit $a = 5 \text{ cm}$ und $b = 12 \text{ cm}$

b) Kreis mit $d = 8 \text{ cm}$

Lösung:

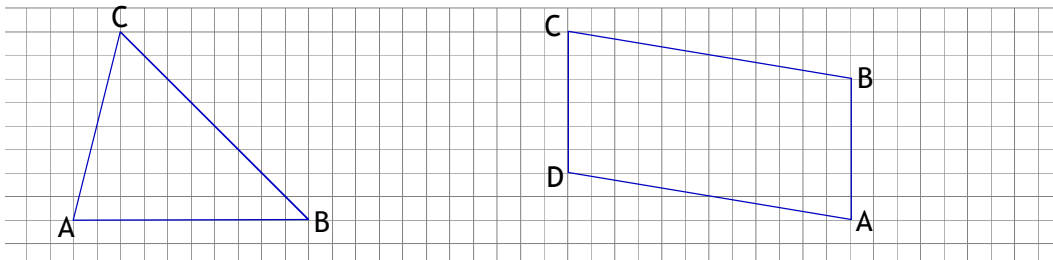
a) Einsetzen von $a = 5 \text{ cm}$ und $b = 12 \text{ cm}$ in die Formeln $A = a \cdot b$ und $u = 2a + 2b$ ergibt:
 $A = 5 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2$ und $u = 2 \cdot 5 \text{ cm} + 2 \cdot 12 \text{ cm} = 10 \text{ cm} + 24 \text{ cm} = 34 \text{ cm}$

b) Der Radius des Kreises ist $r = 0,5 \cdot 8 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$. Einsetzen von $r = 4 \text{ cm}$ in die Formeln $A = \pi \cdot r^2$ und $u = 2\pi \cdot r$ ergibt:

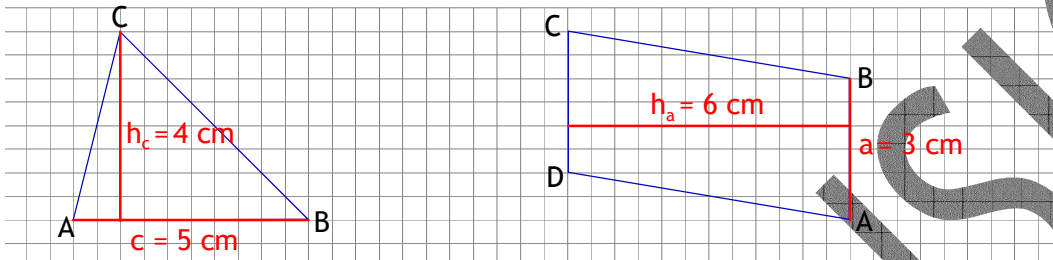
$A = \pi \cdot (4 \text{ cm})^2 = 50,3 \text{ cm}^2$ und
 $u = 2\pi \cdot 4 \text{ cm} = 25,1 \text{ cm}$

Beispiel 2:

Entnimm der Zeichnung die nötigen Maße und bestimme den Flächeninhalt der Figur.
Ein Kästchen entspricht 5 mm.



Lösung:



Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$

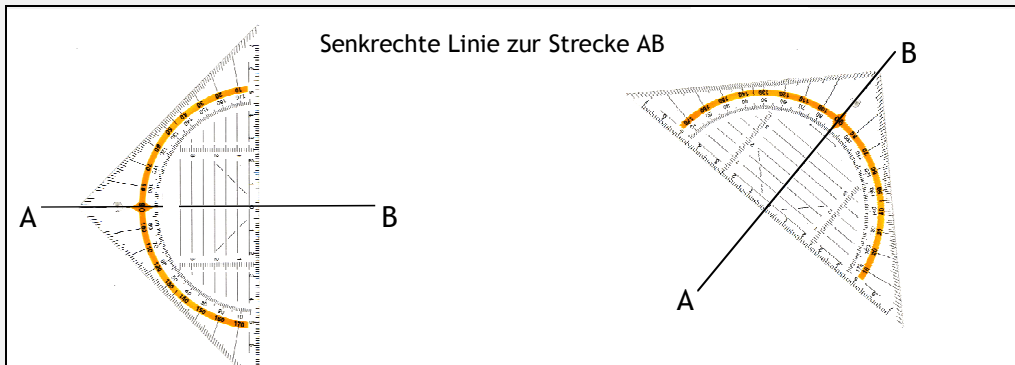
Parallelogramm: $A = 3 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$

Rechte Winkel mit dem Geodreieck zeichnen

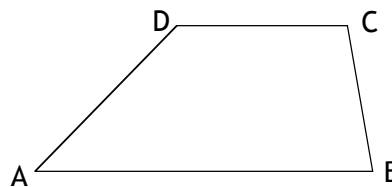
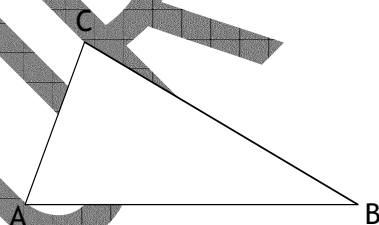
Wenn du die Höhe in einem Dreieck, Parallelogramm oder Trapez einzeichnen und messen willst, musst du mit dem Geodreieck einen rechten Winkel zeichnen. Dabei musst du je nach Lage einer Strecke das Geodreieck so anlegen:



← Tipp

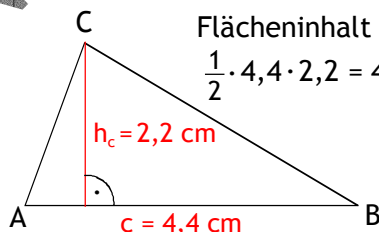


Beispiel 3: Miss die nötigen Längen und bestimme den Flächeninhalt der Figur.



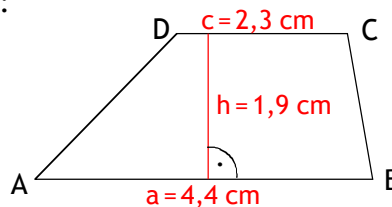
AB parallel zu CD

Lösung:



Flächeninhalt (Dreieck):

$$\frac{1}{2} \cdot 4,4 \cdot 2,2 = 4,84 \text{ cm}^2$$



Flächeninhalt (Trapez):

$$\frac{1}{2} \cdot (4,4 + 2,3) \cdot 1,9 = 6,4 \text{ cm}^2$$

6.2. Winkel in Dreiecken und Vierecken:

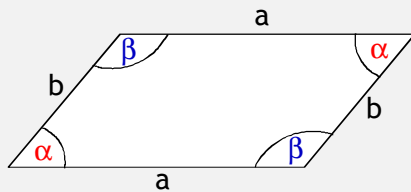


← Merke

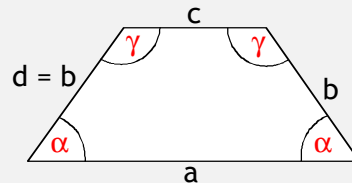
• **Winkelsumme in Dreiecken und Vierecken:**

- In **Dreiecken** beträgt die Summe der Innenwinkel immer 180° .
- In **Vierecken** beträgt die Summe der Innenwinkel immer 360° .

• **Winkel in speziellen Figuren:**

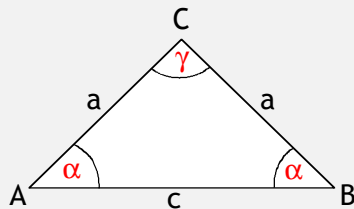


In einem **Parallelogramm** sind die gegenüberliegenden Winkel gleich groß. Die Summe der Basiswinkel α und β ist 180° . Es gilt: $\alpha + \beta = 180^\circ$



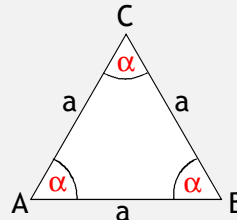
In einem **gleichschenkligen Trapez** gilt $d = b$. Außerdem sind die beiden unteren Winkel und die beiden oberen Winkel jeweils gleich groß.

Gleichschenkliges Dreieck:



In einem **gleichschenkligen Dreieck** sind zwei Seiten gleich lang. Die zwei Innenwinkel an der dritten Seite sind gleich groß.

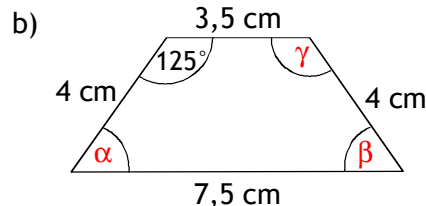
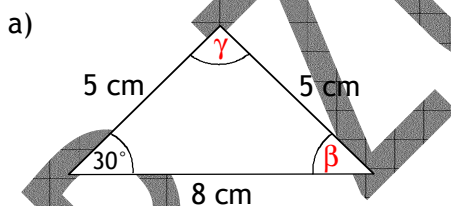
Gleichseitiges Dreieck:



In einem **gleichseitigen Dreieck** sind alle drei Seiten gleich lang und alle Innenwinkel alle gleich groß: $\alpha = 60^\circ$

Beispiel 4: Berechne jeweils die fehlenden Winkel.

Tipp: Du benötigst die Summe der Innenwinkel in Dreiecken bzw. Vierecken.



Lösung:

a) Weil das Dreieck gleichschenkelig ist mit der Grundseite $c = 8 \text{ cm}$, gilt $\beta = 30^\circ$. Für die Summe der Innenwinkel muss dann gelten: $2 \cdot 30^\circ + \gamma = 180^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Umformen nach } \gamma \text{ ergibt: } & 2 \cdot 30^\circ + \gamma = 180^\circ \\ \Leftrightarrow & 60^\circ + \gamma = 180^\circ \quad | - 60^\circ \\ \Leftrightarrow & \gamma = 120^\circ \end{aligned}$$

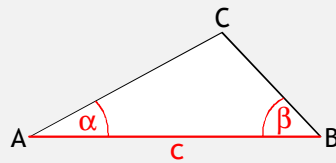
b) Weil das Trapez gleichschenkelig ist, gilt $\gamma = 125^\circ$ und $\beta = \alpha$. Einsetzen in die Summe der Innenwinkel $\alpha + \beta + \gamma + 125^\circ = 360^\circ$ ergibt: $2\alpha + 125^\circ + 125^\circ = 360^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Umformen nach } \alpha \text{ ergibt: } & 2\alpha + 125^\circ + 125^\circ = 360^\circ \\ \Leftrightarrow & 2\alpha + 250^\circ = 360^\circ \quad | - 250^\circ \\ \Leftrightarrow & 2\alpha = 110^\circ \quad | : 2 \\ \Leftrightarrow & \alpha = 55^\circ \text{ und damit auch } \beta = 55^\circ \end{aligned}$$

6.3. Dreieckskonstruktionen:

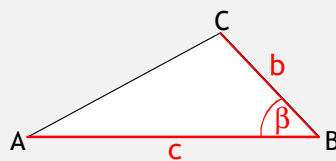
Wenn du in der Prüfung ein Dreieck konstruieren sollst, kommen nur zwei Sorten von Konstruktionen vor:

Sorte 1: Die Länge einer Seite und zwei angrenzende Winkel sind gegeben.



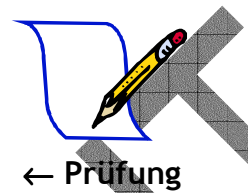
Solche Dreiecke konstruierst du, indem du zuerst die bekannte Seite zeichnest. Anschließend zeichnest du von ihren Endpunkten aus die fehlenden Seiten mit den bekannten Winkeln. Verlängere die beiden Seiten dann so weit, bis sie sich schneiden (siehe Beispiel 5).

Sorte 2: Die Länge zweier Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel sind bekannt.



Solche Dreiecke konstruierst du, indem du zuerst eine bekannte Seite zeichnest, zum Beispiel die Seite c. Anschließend zeichnest du die andere bekannte Seite mit dem bekannten Winkel zur ersten bekannten Seite (siehe Beispiel 6).

Tipp: Erstelle immer zuerst eine Skizze eines Dreiecks und trage darin die bekannten Seitenlängen und Winkel ein. Dann erkennst du schnell, um welche Sorte Dreieck es sich handelt.



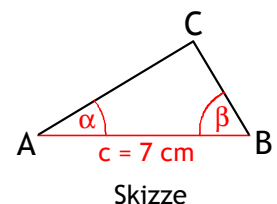
Beispiel 5:

Konstruiere folgendes Dreieck: $c = 7\text{ cm}$; $\alpha = 31^\circ$; $\beta = 59^\circ$

Lösung: Es handelt sich um ein Dreieck der Sorte 1 (siehe oben).

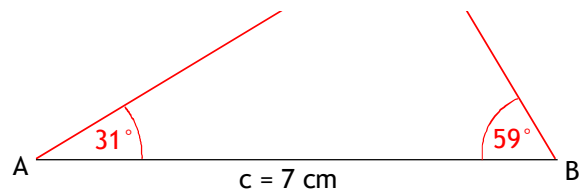
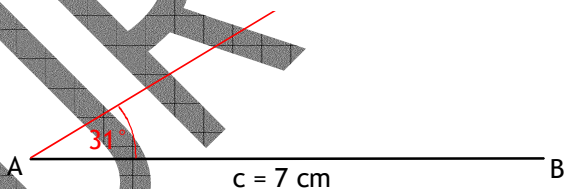
1. Schritt:

Zunächst zeichnet man die Seite $c = 7\text{ cm}$ und beschriftet ihre Enden mit A und B:

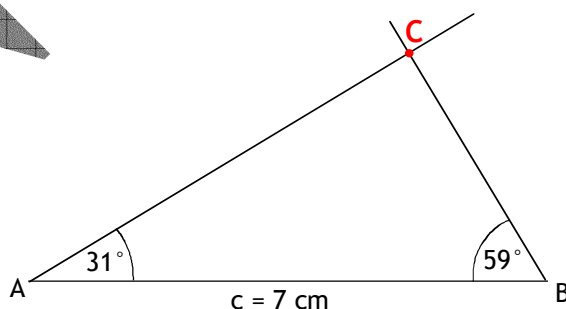


2. Schritt:

Anschließend zeichnet man mit dem Geodreieck von A aus eine Linie, die zur Strecke AB den Winkel $\alpha = 31^\circ$ hat. Das Gleiche macht man von B aus mit dem Winkel $\beta = 59^\circ$:



3. Schritt: Dort, wo sich die beiden Linien aus dem 2. Schritt schneiden, ist der **Punkt C**:



Beispiel 6:

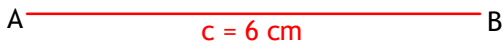
Zeichne ein Dreieck mit den Maßen $c = 6 \text{ cm}$; $b = 6 \text{ cm}$ und $\alpha = 80^\circ$.

Lösung:

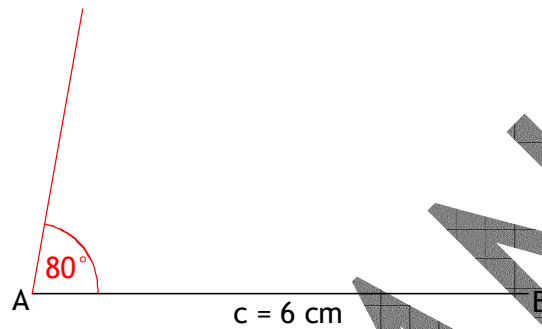
Es handelt sich um ein Dreieck der Sorte 2 (siehe oben).

1. Schritt:

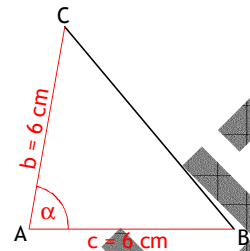
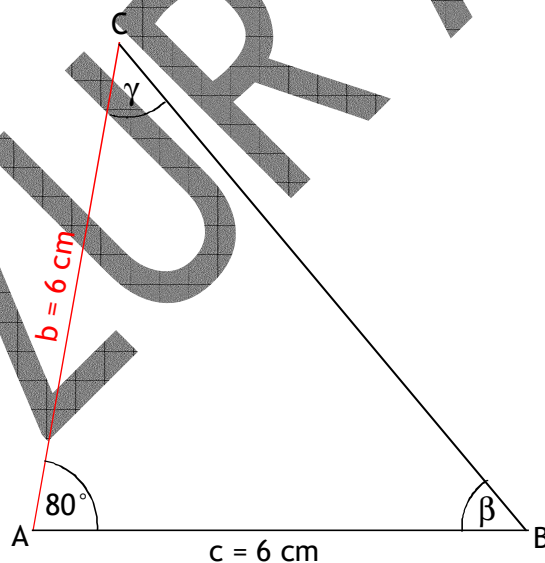
Zeichne die Strecke $c = 6 \text{ cm}$ und beschrifte deren Endpunkte mit A und B.

**2. Schritt:**

Trage mit dem Geodreieck von A aus den Winkel $\alpha = 80^\circ$ ab.

**3. Schritt:**

Messe auf dem eingezeichneten Schenkel die Länge $b = 6 \text{ cm}$ ab. Der Endpunkt ist der Punkt C. Verbinde dann den Punkt C mit dem Punkt B.



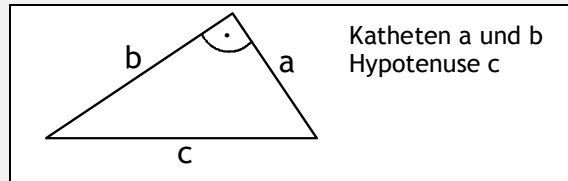
Skizze

6.4. Der Satz des Pythagoras:

- In einem rechtwinkligen Dreieck gilt der **Satz des Pythagoras**:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, werden **Katheten** genannt.
Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt **Hypotenuse**.



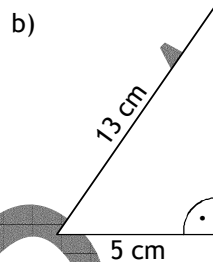
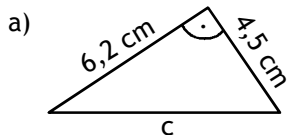
Kennt man zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, kann man mit dem Satz des Pythagoras die dritte Seite berechnen (siehe Beispiel 7).

- Umgekehrt gilt auch: Wenn in einem Dreieck der Satz des Pythagoras erfüllt ist, ist das Dreieck rechtwinklig (siehe Beispiel 8).



← **Merke**

Beispiel 7: Berechne die fehlende Seitenlänge in dem rechtwinkligen Dreieck.



Lösung:

a) Gesucht ist die Länge der Hypotenuse c. Es gilt: $6,2^2 + 4,5^2 = c^2$ bzw. $c^2 = 6,2^2 + 4,5^2$

Umformen nach c ergibt:

$$c^2 = 6,2^2 + 4,5^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 58,69$$

$$\Rightarrow c = 7,66 \text{ cm}$$

b) Gesucht ist die Länge der Kathete x. Es gilt: $x^2 + 5^2 = 13^2$

Umformen nach x ergibt:

$$x^2 + 5^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 25 = 169 \quad | -25$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 144 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

Beispiel 8:

Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 6,5 \text{ cm}$; $b = 7,2 \text{ cm}$ und $c = 9,7 \text{ cm}$.

Überprüfe, ob das Dreieck rechtwinklig ist. Falls ja: Welche Seiten schließen den rechten Winkel ein ?

Lösung:

Falls das Dreieck rechtwinklig ist, muss gelten: $6,5^2 + 7,2^2 = 9,7^2$

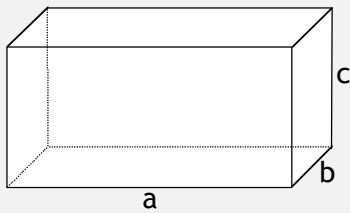
Ausrechnen der Quadrate ergibt: $42,25 + 51,84 = 94,09$

Weil die Summe $42,25 + 51,84$ tatsächlich den Wert $94,09$ hat, ist der Satz des Pythagoras erfüllt.
Somit ist das Dreieck rechtwinklig.

Der rechte Winkel wird von den beiden Katheten $a = 6,5 \text{ cm}$ und $b = 7,2 \text{ cm}$ eingeschlossen.

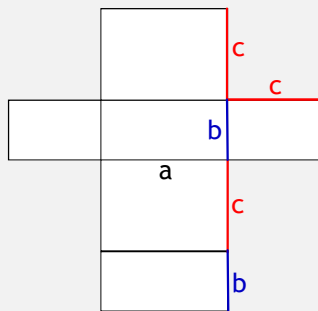
6.5. Volumen von Körpern:

Quader:

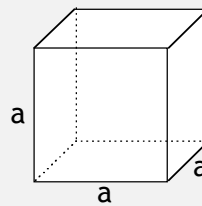


Volumen $V = a \cdot b \cdot c$
 Oberfläche $O = 2ab + 2ac + 2bc$

Netz eines Quaders:

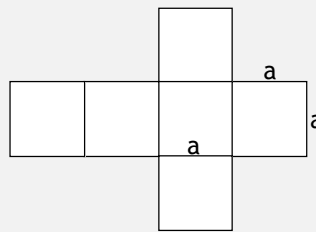


Würfel:



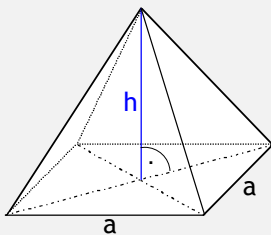
Volumen $V = a \cdot a \cdot a = a^3$
 Oberfläche $O = 6a^2$

Netz eines Würfels:



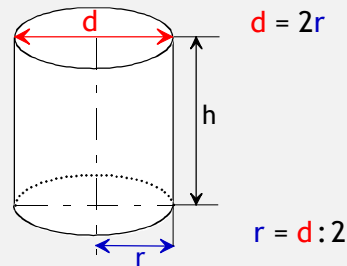
← Merke

Quadratische Pyramide:



Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$
 Oberfläche = 1 Quadrat + 4 Dreiecke
 Also: $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$

Zylinder:

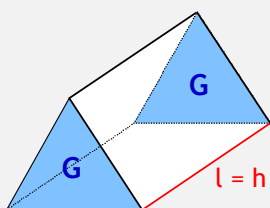


Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
 Die Oberfläche eines Zylinders wird in der Prüfung nicht benötigt.

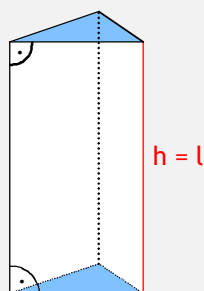
Prisma:

Ein Prisma besteht aus zwei identischen Flächen G, die parallel zueinander stehen und über ihre Ecken miteinander verbunden sind. Prismen werden entweder liegend oder stehend abgebildet.

Dreiecksprisma:

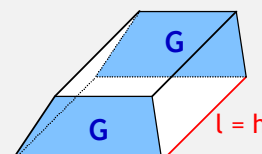


liegend



stehend

Trapezprisma:



liegend



stehend

Volumen eines geraden Prismas: $V = G \cdot h$

Tipp: Zur Berechnung des Volumens eines Prismas muss man immer die Fläche G berechnen.

Beispiel 9:

Ein quaderförmiger Karton soll die Länge $a = 60\text{ cm}$ und die Breite $b = 25\text{ cm}$ haben. Wie muss man die Höhe c wählen, damit in den Karton $52,5\text{ Liter}$ hineinpassen ?

Lösung:

Zunächst muss man die Einheit Liter ($= 1\text{ dm}^3$) in cm^3 umwandeln (siehe S. 33, Kapitel 5.3.).

Es ist: $52,5\text{ Liter} = 52,5\text{ dm}^3 = 52,5 \cdot 1000\text{ cm}^3 = 52500\text{ cm}^3$.

Mit der Höhe c soll nun für das Volumen des Kartons gelten: $60\text{ cm} \cdot 25\text{ cm} \cdot c = 52500\text{ cm}^3$

Umstellen nach c ergibt (ohne Einheiten):

$$60 \cdot 25 \cdot c = 52500$$

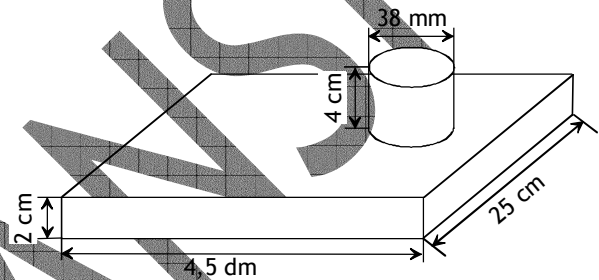
$$\Leftrightarrow 1500 c = 52500 \quad | :1500$$

$$\Leftrightarrow c = 35$$

Die Höhe des Karton muss also $c = 35\text{ cm}$ betragen.

Beispiel 10:

Berechne das Volumen des zusammengesetzten Körpers. Entnimm die benötigten Maße aus der Zeichnung. Achte darauf, dass alle Maße die gleiche Einheit haben !



Lösung:

Der zusammengesetzte Körper besteht aus einem Quader und einem Zylinder.

- Der **Quader** hat die Maße: Breite = $4,5\text{ dm} = 45\text{ cm}$; Höhe = 2 cm ; Länge = 25 cm

Für das Volumen des Quaders folgt somit: $V_Q = 45\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} \cdot 25\text{ cm} = 2250\text{ cm}^3$

- Der **Zylinder** hat die Höhe $h = 4\text{ cm}$ und den Durchmesser $d = 38\text{ mm} = 3,8\text{ cm}$. Sein Radius ist somit $r = 3,8\text{ cm} : 2 = 1,9\text{ cm}$.

Einsetzen von $r = 1,9\text{ cm}$ und $h = 4\text{ cm}$ in die Volumenformel $V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ ergibt (ohne die Einheit cm):

$$V_{Zyl} = \pi \cdot 1,9^2 \cdot 4 = \pi \cdot 3,61 \cdot 4 = 45,36\text{ cm}^3$$

Das Volumen des gesamten Körpers ist also $V_{ges} = 2250\text{ cm}^3 + 45,36\text{ cm}^3 = 2295,36\text{ cm}^3$

Beispiel 11:

Berechne das Volumen des abgebildeten Körpers. (Hinweis: Man nennt so eine Form auch „T-Träger“.)

Lösung:

Der Körper ist ein Prisma. Für dessen Volumen gilt: $V_{Prisma} = G \cdot l$

G ist der Flächeninhalt der **Vorderseite** (siehe Figur 1).

Die Länge l des Körpers ist $l = 120\text{ cm}$.

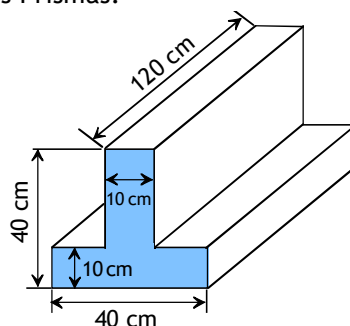
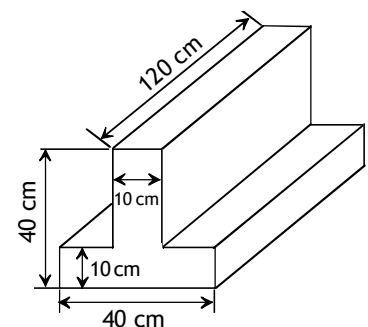
Die Fläche G besteht aus zwei **Rechtecken** mit den Maßen $10\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ und $30\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ (siehe Figur 2).

Somit folgt: $G = 10\text{ cm} \cdot 40\text{ cm} + 30\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 400\text{ cm}^2 + 300\text{ cm}^2 = 700\text{ cm}^2$

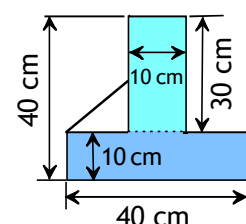
Mit $l = 120\text{ cm}$ erhält man für das Volumen des Prismas:

$$V_{Prisma} = 700\text{ cm}^2 \cdot 120\text{ cm} = 84000\text{ cm}^3$$

Der Körper hat ein Volumen von 84000 cm^3 .



Figur 1



Figur 2

7. Funktionale Zusammenhänge

7.1. Der Maßstab von Zeichnungen:

Die Maßstabsangabe $1 : a$ bedeutet, dass einem Zentimeter in der Zeichnung eine Länge a cm in Wirklichkeit entspricht. Die Zahl a wird Maßstabszahl genannt und ist immer ganzzahlig.

Zum Beispiel entspricht bei der Maßstabsangabe $1 : 2000$ einem Zentimeter in der Zeichnung der Länge 2000 cm in Wirklichkeit.

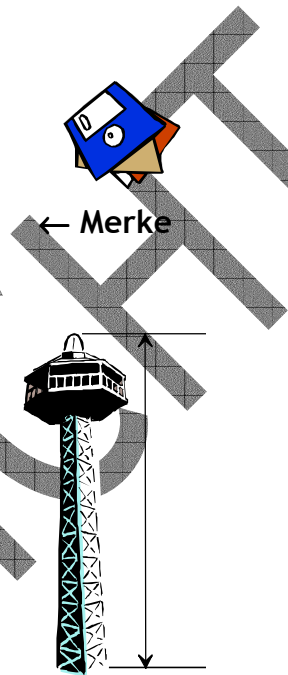
Beispiel 1:

Der Turm ist im Maßstab $1 : 3000$ dargestellt. Wie hoch ist der Turm in Wirklichkeit? Gib das Ergebnis in Meter an.

Lösung:

Die Maßstabsangabe $1 : 3000$ bedeutet, dass 1 cm in der Zeichnung 3000 cm in Wirklichkeit entspricht.

Der Turm hat in der Zeichnung die Höhe $4,4$ cm. Somit ist die Höhe des Turms in Wirklichkeit $4,4 \text{ cm} \cdot 3000 = 13200 \text{ cm} = 132 \text{ m}$.



Vorsicht bei Flächenberechnungen !

In der Prüfung soll man gelegentlich anhand einer Zeichnung die **Fläche einer Figur** in Wirklichkeit bestimmen. Dabei musst du folgende Stolperfalle beachten: Wenn du den Flächeninhalt in der Zeichnung in cm^2 bestimmst, musst du dieses Ergebnis mit dem **Quadrat** der Maßstabszahl multiplizieren. Bei einem Maßstab von $1 : 200$ also mit $200 \cdot 200 = 40000$.

Klüger ist es daher, wenn du den Flächeninhalt einer Figur gleich mit den Längen in Wirklichkeit berechnest (siehe Beispiel 2).



Beispiel 2:

Die Zeichnung zeigt die Umriss des Bundesstaats Nevada (USA). Welche Fläche hat der Bundesstaat Nevada in Wirklichkeit?

Lösung:

Zur Berechnung der Fläche von Nevada kann man den Umriss in ein großes Rechteck (R1), ein Dreieck und ein kleines Rechteck (R2) unterteilen (siehe Figur 1).

Anschließend muss man die benötigten Längen in cm messen und dann in km umrechnen (siehe Figur 1). Mit den Längen in km kann man dann die Fläche von Nevada in Wirklichkeit berechnen.

Da in der Zeichnung 1 cm der Länge 179 km entspricht, muss man zur Umrechnung in km alle Längen in cm mit 179 multiplizieren.

Man erhält:

Rechteck 1: $501,2 \text{ km} \cdot 349 \text{ km} = 174919 \text{ km}^2$

Rechteck 2: $53,7 \text{ km} \cdot 331 \text{ km} = 17775 \text{ km}^2$

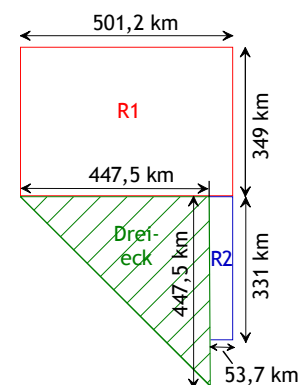
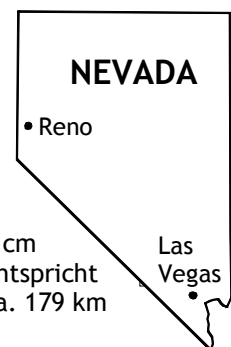
Dreieck: $\frac{1}{2} \cdot 447,5 \text{ km} \cdot 447,5 \text{ km} = 100128 \text{ km}^2$

(Hinweis: In dem Dreieck ist $g = 447,5 \text{ km}$ und $h = 447,5 \text{ km}$.)

Die Gesamtfläche von Nevada beträgt somit:

$$A_{\text{Nevada}} = 174919 \text{ km}^2 + 17775 \text{ km}^2 + 100128 \text{ km}^2 = 292822 \text{ km}^2$$

(Hinweis: Aufgrund der begrenzten Messgenauigkeit sind Abweichungen möglich.)



Figur 1

7.2. Dreisatzrechnung:

Proportionale Zuordnungen

Es gibt Größen, die voneinander abhängen. Zum Beispiel hängt beim Einkauf von Äpfeln der Preis y vom Gewicht x der Äpfel ab. Man spricht dann von einer **Zuordnung** $x \rightarrow y$. (Jedem Wert x wird genau ein Wert y zugeordnet.)

Wenn zum 2-, 3-, 4-, ... fachen der Größe x auch das 2-, 3-, 4-, ... fache der Größe y gehört, spricht man von einer **proportionalen Zuordnung**.

Aus der Zuordnung zweier Zahlenwerte kann man mit einer **Dreisatzrechnung** auf jede andere Zuordnung schließen. Dazu notiert man sich die Zuordnung der bekannten Werte so, dass die Einheit der gesuchten Größe rechts steht (siehe Beispiel 3). Anschließend bestimmt man über den „1er-Wert“ der linken Größe die gesuchte Zuordnung.

Beachte:

Die Quotienten $y : x$ bzw. $x : y$ sind bei einer proportionalen Zuordnung immer gleich. Du kannst dies zur Kontrolle deiner Rechnung benutzen.



← **Merke**

Beispiel 3: Gabi kauft auf dem Markt 5 kg Äpfel zu einem Preis von 17,50 €. Wie viel hätte sie bezahlen müssen, wenn sie nur 4 kg Äpfel gekauft hätte ?

Lösung:

	Gewicht der Äpfel	Preis in €	
	5 kg	→	17,50 €
:5	1 kg	→	3,50 €
·4	4 kg	→	14 €

Gabi hätte für 4 kg Äpfel nur **14,00 €** bezahlen müssen.

Proportionale Zuordnung in Tabellen

Wenn Wertepaare einer proportionalen Zuordnung in einer Tabelle angegeben sind, kann man fehlende Werte ganz leicht mit dem Quotienten $x : y$ bzw. $y : x$ bestimmen (siehe Beispiel 4).



← **Prüfung**

Beispiel 4:

Familie Schmidt fährt mit dem Zug in den Urlaub. Ergänze die fehlenden Werte der Tabelle, wenn der Zug mit gleichbleibender Geschwindigkeit fährt.

gefahrte Strecke in km	60		120
Fahrzeit in Stunden		2	1,5

Lösung:

Die fehlenden Werte werden mit den Variablen x und y bezeichnet. Da es sich um eine proportionale Zuordnung handelt, ist der Quotient aus gefahrener Strecke und der Fahrzeit immer gleich. Es muss also gelten: $x : 2 = 120 : 1,5$

gefahrte Strecke in km	60	x	120
Fahrzeit in Stunden	y	2	1,5

Oder als Brüche geschrieben: $\frac{x}{2} = \frac{120}{1,5}$

Für y gilt entsprechend: $y : 60 = 1,5 : 120$
Und mit Brüchen:

Umstellen nach x ergibt (vgl. Kap. 3.3.):

$$\frac{y}{60} = \frac{1,5}{120} \quad | \cdot 60$$

$$\frac{x}{2} = \frac{120}{1,5}$$

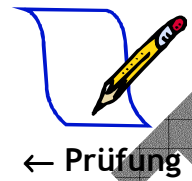
$$\Leftrightarrow \frac{y}{60} = \frac{1,5}{120} \cdot 60$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 80 \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow y = 0,75 \text{ bzw. } y = 0,75 \text{ h}$$

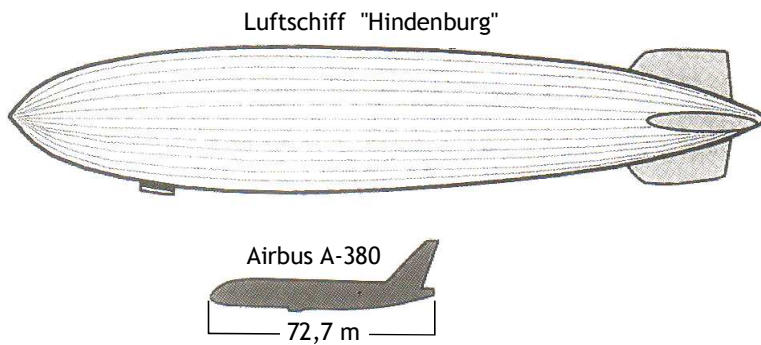
$$\Leftrightarrow x = 160 \text{ bzw. } x = 160 \text{ km}$$

Eine spezielle Prüfungsaufgabe ist es, wenn **zwei Figuren in einer Zeichnung** abgebildet sind, wobei von einer Figur auch die Maße in Wirklichkeit bekannt sind. Die Maße der anderen Figur sollen bestimmt werden. Zur Lösung einer solchen Aufgabe muss man die Längen beider Figuren in der Zeichnung messen. Anhand der Maße der einen Figur in Wirklichkeit und in der Zeichnung kann man dann die Maße der anderen Figur bestimmen (siehe Beispiel 5).



Beispiel 5:

a) Die „Hindenburg“ war das größte Luftschiff der Geschichte. Ermittle die Länge des Luftschiffs.

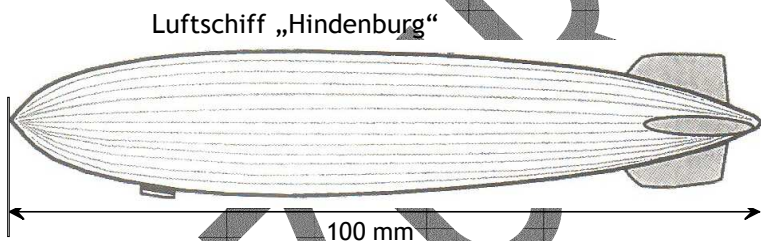


Lösung:

Zuerst muss man die Länge des Airbus in der Zeichnung messen. Man erhält: $L_{Air} = 30 \text{ mm}$
 Da der Airbus in Wirklichkeit 72,7 m lang ist, gilt die Beziehung:

30 mm in der Zeichnung $\hat{=}$ 72,7 m in Wirklichkeit

Um daraus die Länge des Luftschiffs berechnen zu können, muss man die Länge des Luftschiffs in der Zeichnung messen. Man erhält: $L_{Luft} = 100 \text{ mm}$



Mit einer Dreisatzrechnung kann man nun die Länge des Luftschiffs in Wirklichkeit berechnen:

Zeichnung	Wirklichkeit
30 mm	$\hat{=}$ 72,7 m
$: 30$	
1 mm	$\hat{=}$ 2,423 m
$\cdot 100$	
100 mm	$\hat{=}$ 242,3 m

Das Luftschiff „Hindenburg“ war laut der Zeichnung in Wirklichkeit ca. **242 m** lang.

(Hinweis: Aufgrund der begrenzten Messgenauigkeit sind kleine Abweichungen möglich.)



← **Merke**

Umgekehrt proportionale Zuordnungen

Wenn zum 2-, 3-, 4-, ... fachen der Größe x der 2-te, 3-te, 4-te, ... Teil der Größe y gehört, spricht man von einer **umgekehrt proportionalen Zuordnung**.

Zur Berechnung einer fehlenden Größe mit Hilfe einer Dreisatzrechnung muss man auf den Seiten des Dreisatzschemas entgegengesetzte Rechenoperationen durchführen (siehe Beispiel 6).

Bei einer umgekehrt proportionalen Zuordnung ist das **Produkt x · y immer gleich**. Du kannst dies zur Kontrolle deiner Rechnung benutzen.

Beachte: Eine typische umgekehrt proportionale Zuordnung ist die Beziehung zwischen einer Geschwindigkeit und der Zeit, die ein Fahrzeug oder ein Läufer für eine bestimmte Strecke benötigt (siehe Beispiel 6). Umgekehrt proportionale Zuordnungen sind in der Prüfung allerdings eher selten.

Beispiel 6:

Herr Renner benötigt für seine übliche Joggingstrecke 0,75 h, wenn er mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h läuft. Wie schnell müsste er laufen, wenn er dieselbe Strecke in 0,6 h laufen möchte ?

Lösung:

Es handelt sich um eine umgekehrt proportionale Zuordnung. Denn je schneller Herr Renner läuft, umso kürzer ist die Zeit, die er für seine Strecke benötigt. Mit einer Dreisatzrechnung erhält man:

Zeit	≅	Geschwindigkeit
: 0,75		0,75 h ≅ 12 km/h
↙ ↘		↙ ↘
1 h		9 km/h
· 0,6		: 0,6
↙ ↘		↙ ↘
0,6 h		15 km/h

Herr Renner müsste mit einer Geschwindigkeit von **15 km/h** laufen, wenn er die Strecke in 0,6 h zurücklegen will.

Beispiel 7:

5 Freunde möchten eine Packung Kekse gerecht unter sich aufteilen. In der Packung befinden sich 45 Kekse. Wie viele Kekse würde jeder bekommen, wenn es nur 3 Freunde wären ?

Lösung:

Es handelt sich um eine umgekehrt proportionale Zuordnung. Denn je weniger Freunde es sind, umso mehr Kekse bekommt jeder. Bei 5 Freunden bekommt jeder 9 Kekse (= 45 Kekse : 5). Mit einer Dreisatzrechnung erhält man:

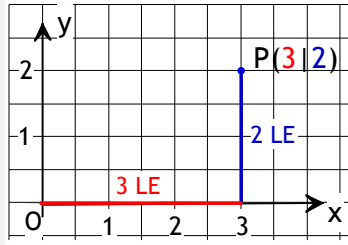
Anzahl der Freunde	≅	Kekse pro Person
: 5		5 Freunde ≅ 9 Kekse
↙ ↘		↙ ↘
1 Freund		45 Kekse
· 3		: 3
↙ ↘		↙ ↘
3 Freunde		15 Kekse

Bei 3 Freunden bekommt jeder **15 Kekse**.

7.3. Grafische Darstellung von Zusammenhängen:

Punkte im Koordinatensystem

Ein Koordinatensystem besteht aus der x-Achse (waagrecht) und senkrecht dazu der y-Achse. Die Lage eines Punktes im Koordinatensystem wird durch dessen Koordinaten $P(x|y)$ beschrieben. Um beispielsweise den Punkt $P(3|2)$ einzuzichnen, geht man zuerst auf der x-Achse 3 Längeneinheiten (LE) nach rechts und von dort aus 2 Längeneinheiten nach oben.



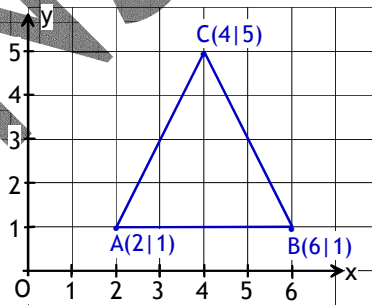
← Merke

Beispiel 8:

Trage die Punkte $A(2|1)$, $B(6|1)$ und $C(4|5)$ in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie miteinander. Welche Figur entsteht?

Lösung:

Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck. Die Seiten AC und BC sind gleich lang.



Wenn man sehr viele Wertepaare $(x|y)$ einer Zuordnung in ein Koordinatensystem einträgt und alle Punkte miteinander verbindet, erhält man das **Schaubild einer Zuordnung**. Anhand eines solches Schaubilder kann man zu einem bekannten Wert x bzw. y leicht den zugehörigen Wert ablesen (siehe Beispiel 9). Bei einer proportionalen Zuordnung ist das Schaubild eine Gerade.



← Merke

Beispiel 9:

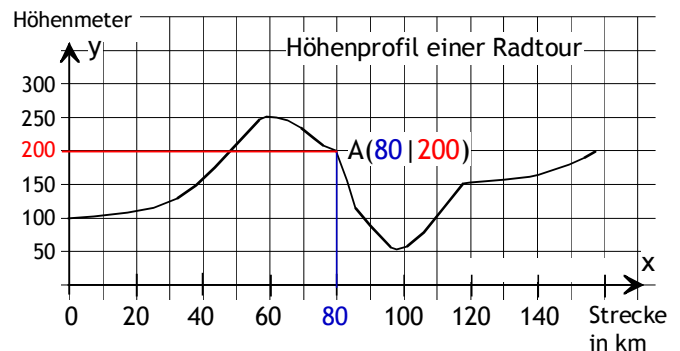
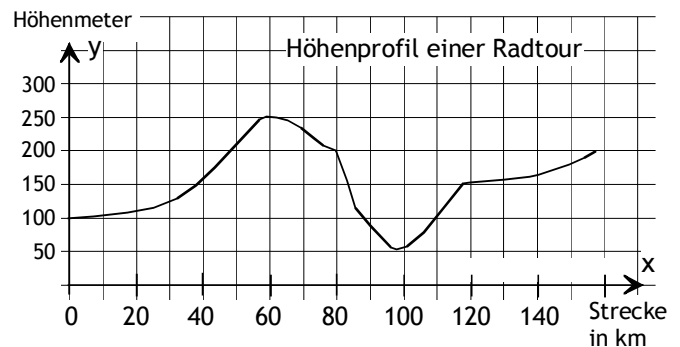
Das Diagramm zeigt das Höhenprofil einer Radtour.

- a) Auf welcher Höhe befindet sich ein Radfahrer nach einer Strecke von 80 km?
- b) Wie weit muss ein Radfahrer fahren, um eine Höhe von 250 m zu erreichen?

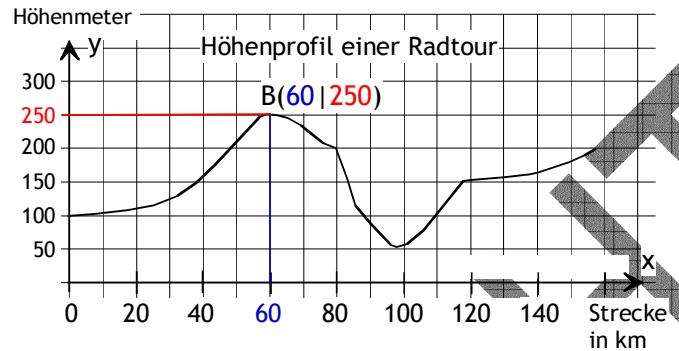
Lösung:

- a) Man muss auf der x-Achse von 80 km aus *senkrecht* nach oben gehen, bis man auf die Kurve trifft. Die y-Koordinate dieses Punkts ist dann die gesuchte Höhe. Man erhält den Kurvenpunkt $A(80|200)$. Nach 80 km befindet sich der Radfahrer also auf einer Höhe von **200 m**.

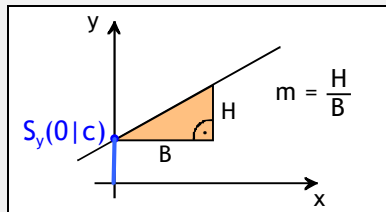
→ weiter auf Seite 51 mit der Lösung zu b)



b)
 Man muss auf der y-Achse von 250 m aus *waagrecht* nach rechts gehen, bis man auf die Kurve trifft. Die x-Koordinate dieses Punkts ist dann die gesuchte Höhe.
 Man erhält den Kurvenpunkt **B(60 | 250)**.
 Der Radfahrer muss also 60 km weit fahren, bis er sich auf einer Höhe von 250 m befindet.



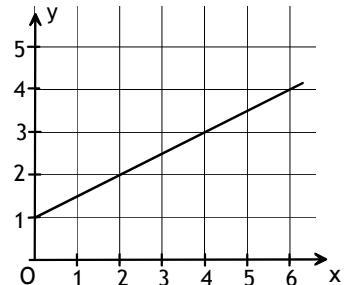
- Wenn das Schaubild einer Zuordnung $x \rightarrow y$ eine Gerade ist, kann man die Zuordnung mit der **Geradengleichung** $y = m \cdot x + c$ beschreiben; mit der **Steigung m** und dem **y-Achsenabschnitt c**. Die Gerade läuft immer durch den Punkt $S_y(0 | c)$ auf der y-Achse.
- Anhand des Schaubilds kann man eine Geradengleichung folgendermaßen bestimmen:
 1.) Zuerst liest man ab, wo die Gerade die y-Achse schneidet. Das ist der Wert c.
 2.) Anschließend zeichnet man von $S_y(0 | c)$ aus ein sogenanntes **Steigungsdreieck** mit der Höhe H und der Breite B. Der Quotient $H : B$ ist dann die Steigung m der Geraden.



Beispiel 10:

- a) Bestimme die Gleichung der abgebildeten Geraden.
 b) Lies im Schaubild die y-Koordinate des Punktes $P(6 | \underline{\quad})$ ab.

Zusatz:
 Überprüfe die abgelesene y-Koordinate von P mit Hilfe der Geradengleichung aus a).

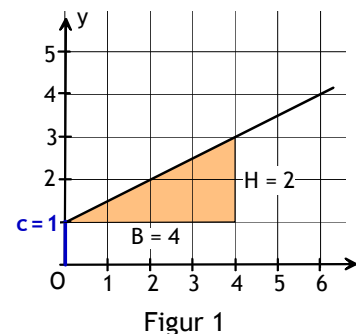


Lösung:

- a) Die Gerade schneidet die y-Achse beim Wert 1; also ist $c = 1$ in der Gleichung $y = m \cdot x + c$ (siehe Figur 1).
 Das Steigungsdreieck hat die Höhe $H = 2$ und die Breite $B = 4$ (siehe rechts).

Also ist die Steigung $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Die Gleichung der Geraden lautet also: $y = 0,5x + 1$ bzw. $y = \frac{1}{2}x + 1$

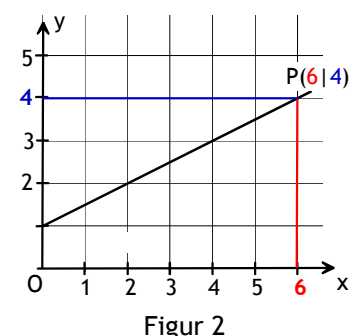


- b) Wenn man auf der x-Achse vom Wert $x = 6$ aus eine Linie senkrecht nach oben zeichnet, trifft man die Gerade im Punkt $P(6 | \underline{\quad})$.
 Die y-Koordinate von P ist $y = 4$ (siehe Figur 2). Der Punkt P hat also die Koordinaten **P(6 | 4)**.

Zusatz:

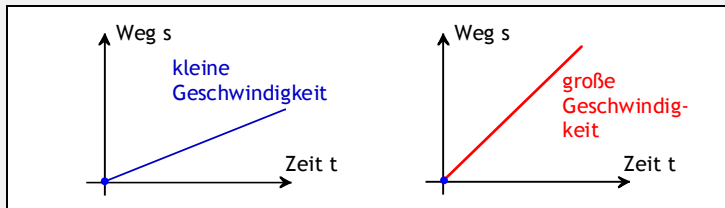
Man kann die y-Koordinate von $P(6 | \underline{\quad})$ auch *berechnen*. Dazu muss man die x-Koordinate $x = 6$ in die Geradengleichung $y = 0,5x + 1$ einsetzen:

$y = 0,5 \cdot 6 + 1 = 3 + 1 = 4$

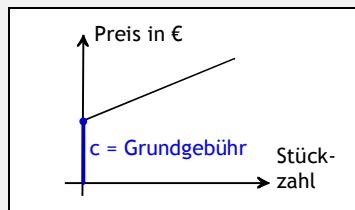


Praktische Anwendungen - wichtig für die Prüfung !

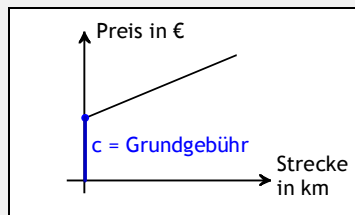
- In dem Schaubild einer Zuordnung **Zeit** → **Weg** ist die Steigung einer Geraden die Geschwindigkeit, mit der sich ein Fahrzeug oder ein Läufer fortbewegt. Je steiler die Gerade verläuft, umso größer ist also die Geschwindigkeit.



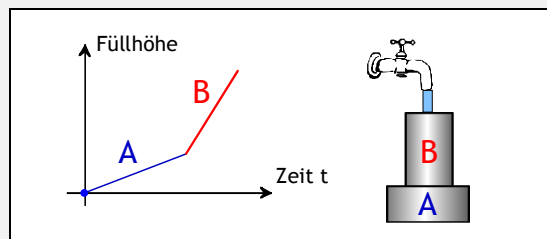
- Bei **Kaufangeboten** hängt der Preis oft nicht nur von der Warenmenge (= Stückzahl) ab, sondern es fällt auch oft eine Grundgebühr an. In dem Schaubild der Zuordnung **Stückzahl** → **Preis** ist die Grundgebühr der y-Achsenabschnitt c:



- Bei einer **Taxifahrt** oder dem **Mieten eines Autos** setzt sich der Preis in der Regel aus einer Grundgebühr und den Kosten für die gefahrene Strecke zusammen. In dem Schaubild der Zuordnung **Strecke** → **Preis** ist die Grundgebühr der y-Achsenabschnitt c:



- Beim gleichmäßigen **Befüllen einer zusammengesetzten Säule** mit Wasser, hängt der zeitliche Verlauf der Füllhöhe von der Dicke eines Säulenabschnitts ab. Je dicker eine Säule, umso langsamer steigt die Füllhöhe an:



← **Tipps**

8. Daten und Wahrscheinlichkeit

8.1. Relative und absolute Häufigkeit:

Es gibt Vorgänge mit unterschiedlichen Ausgängen. Zum Beispiel können beim Würfeln die Augenzahlen 1 bis 6 fallen. Oder bei einer Klassenarbeit können unterschiedliche Noten erreicht werden. Wie oft dabei die einzelnen Ausgänge eintreten, fasst man in einer **Strichliste** zusammen.

Die Anzahl der Striche eines bestimmten Ausganges ist die **absolute Häufigkeit** dieses Ausganges. Der Quotient bzw. Bruch aus der absoluten Häufigkeit und der Gesamtzahl der Striche nennt man **relative Häufigkeit** (siehe Beispiel 1).



← Merke

Beispiel 1:

Leonie hat einen idealen Spielwürfel geworfen und folgende Strichliste erstellt:

Augenzahl:	1	2	3	4	5	6
Wie oft ?						

Erstelle eine Häufigkeitstabelle. Wie groß ist die absolute und relative Häufigkeit der Augenzahl „6“ ?

Lösung:

Häufigkeitstabelle: Man muss lediglich die Striche zählen und als Zahl schreiben.

Augenzahl:	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit:	4	4	6	3	5	3

Die **absolute** Häufigkeit der Augenzahl „6“ ist 3. Die Anzahl der Würfe ist die Summe aller Häufigkeiten.

Also $4 + 4 + 6 + 3 + 5 + 3 = 25$ -mal. Somit ist die **relative** Häufigkeit der Augenzahl „6“ der Bruch $\frac{3}{25}$.

8.2. Der Mittelwert (= Durchschnitt) einer Datenreihe:

Wenn man in einer Datenreihe alle Werte addiert und die Summe aller Werte durch die Anzahl aller Werte teilt, erhält man den **Mittelwert** bzw. **Durchschnitt** dieser Datenreihe (siehe Beispiel 2 und 3).



← Merke

Beispiel 2:

Bestimme den Mittelwert der Temperaturmessungen einer Woche.

Wochentag	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Sa.	So.
Temperatur in °C	9	12	14	15	7	8	5

Lösung:

Die Summe aller Temperaturwerte ist (Einzelwerte in °C): $9 + 12 + 14 + 15 + 7 + 8 + 5 = 70^\circ\text{C}$

Da es 7 Wochentag gibt, ist der Mittelwert (= Durchschnitt) der Temperatur: $70^\circ\text{C} : 7 = 10^\circ\text{C}$

Den Mittelwert anhand einer Strichliste bestimmen

Es kann sehr aufwändig sein, wenn man zur Berechnung des Mittelwerts eine Datenreihe anhand einer Strichliste erstellen muss. So müsste man in Beispiel 1 fünfundzwanzig Werte aufschreiben: 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2;

Man kann sich die Berechnung des Mittelwerts vereinfachen, indem man zuerst jeweils das Produkte aus dem Wert eines Ausganges und der absoluten Häufigkeit dieses Ausganges berechnet (siehe Beispiel 3). Anschließend teilt man die Summe dieser Produkte durch die Summe aller Häufigkeiten.



← Tipp

Beispiel 3:

In Beispiel 1 wurde ein Würfel 25-mal geworfen und die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Augenzahlen notiert. Berechne anhand der Strichliste bzw. Häufigkeitstabelle den Mittelwert der geworfenen Augenzahlen.

Lösung:

Zunächst berechnet man die einzelnen **Produkte** aus Augenzahl und absoluter Häufigkeit:

Augenzahl:	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit:	4	4	6	3	5	3
Produkte:	$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 6 = 18$	$4 \cdot 3 = 12$	$5 \cdot 5 = 25$	$6 \cdot 3 = 18$

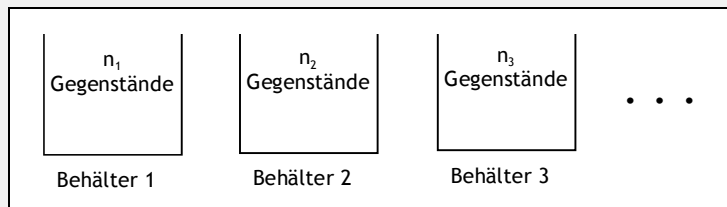
Anschließend addiert man alle Produkte und teilt das Ergebnis durch die Anzahl der Würfe (= Summe der Häufigkeiten); also durch 25. Man erhält: $4 + 8 + 18 + 12 + 25 + 18 = 85$

Der Mittelwert bzw. die durchschnittliche Augenzahl ist somit $85 : 25 = 3,4$

8.3. Kombinationsmöglichkeiten:

Das Grundmodell zur Berechnung der Kombinationsmöglichkeiten:

Man betrachtet eine bestimmte Anzahl an Behältern, die jeweils $n_1, n_2, n_3 \dots$ unterschiedliche Gegenstände enthalten. Wenn man dann aus jedem Behälter genau einen Gegenstand zieht, gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots$ **Kombinationsmöglichkeiten** (s. Beispiel 4).



← Merke

Beispiel 4:

In einer Schulmensa kann man sein Menu selber zusammenstellen. Zur Auswahl stehen:

- Vorspeise:
 - a) Tomatencremesuppe
 - b) Zwiebelsuppe
 - c) Käsebrötchen
- Hauptspeise:
 - a) Kartoffeltaschen mit Reis und Gemüse
 - b) Frikadellen mit Pommes Frites und Salat
- Nachtisch:
 - a) Vanillepudding
 - b) Apfelkompott mit Sahne

Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es, wenn man aus den 3 Bereichen jeweils nur eine Speise wählen darf ?

Lösung:

Im ersten Bereich (Vorspeise) gibt es **3** Wahlmöglichkeiten. Im zweiten Bereich (Hauptspeise) gibt es **2** Wahlmöglichkeiten. Im dritten Bereich (Nachtisch) gibt es **2** Wahlmöglichkeiten.

Insgesamt gibt es also $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ **Kombinationsmöglichkeiten**.

Jeder gegen jeden

Im Sport spielen immer mehrere Mannschaften in einer Liga. Eine vergleichbare Fragestellung des Pflichtteils ist dann, zu wie vielen Paarungen es kommt, wenn jede Mannschaft einmal gegen jede andere spielt.

Die allgemeine Formel bei n Mannschaften ist $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$.

Wie man sich dies anhand einer Tabelle veranschaulichen kann, zeigt Beispiel 5.



← Merke

Beispiel 5:

In der Tischtennis-Bundesliga spielen 12 Vereine. Innerhalb der Vorrunde muss jede Mannschaft einmal gegen jede andere antreten. Wie viele Paarungen werden in der Vorrunde ausgetragen ?

Wie viele Paarungen sind es, wenn man auch die Rückrunde berücksichtigt ?

Lösung:

Man kann sich die Rechnung anhand folgender Tabelle veranschaulichen. Darin stehen die Buchstaben A bis M für die 12 Mannschaften:

	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M
A	X											
B		X										
C			X									
D				X								
E					X					E - K		
F						X						
G							X					
H								X				
J									X			
K					K - E					X		
L											X	
M												X

Jedes weiße Kästchen steht für eine Paarung zwischen den zwei Mannschaften der zugehörigen Zeile und Spalte. Für die Berechnung der Anzahl der Paarungen muss man also zunächst bestimmen, wie viele weiße Kästchen es gibt.

Insgesamt gibt es $12 \cdot 12 = 144$ Kästchen. Davon muss man die 12 grauen Kästchen abziehen, weil eine Mannschaft nicht gegen sich selber spielen kann, Es bleiben also $144 - 12 = 132$ weiße Kästchen übrig.

Weil in dieser Zählung aber auch die Rückrundenpaarungen enthalten sind (z.B. E gegen K und K gegen E), muss man noch durch 2 teilen. Man erhält $132 : 2 = 66$ Paarungen in der Vorrunde.

Wenn man die Paarungen der Rückrunde auch berücksichtigt, sind es insgesamt 132 Paarungen.

Die möglichen Anordnungen von Personen oder Gegenständen in einer Reihe

Um unterschiedliche Gegenstände oder Personen in einer Reihe anzuordnen gibt es

- bei 3 Personen/Gegenständen $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten
- bei 4 Personen/Gegenständen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten
- bei 5 Personen/Gegenständen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten

usw. (Zur Herleitung dieser Formeln siehe Beispiel 6.)

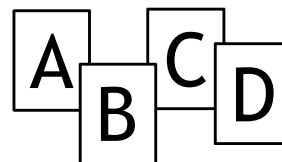
Ein praktisches Beispiel aus dem Alltag ist, wenn sich mehrere Personen auf gleich viele Sitzplätze verteilen.



← Tipp

Beispiel 6:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die vier Kärtchen in einer Reihe anzuordnen?

**Lösung:**

Es gibt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten.

Man kann sich die Rechnung so veranschaulichen:

Für den ersten Platz hat man 4 Auswahlmöglichkeiten.

Für den zweiten Platz stehen noch 3 Kärtchen zur Auswahl.

Für den dritten Platz kann man nur noch zwischen 2 Kärtchen auswählen.

Für den vierten Platz bleibt nur noch 1 Kärtchen übrig.

8.4. Wahrscheinlichkeiten berechnen:

- Man spricht von einem **Zufallsexperiment**, wenn sich der Ausgang eines Versuchs nicht vorhersagen lässt. Alle möglichen Ausgänge werden **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments genannt. Mehrere Ergebnisse kann man zu einem **Ereignis** zusammenfassen.
- Wenn alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich wahrscheinlich sind, gilt für die **Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E**:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

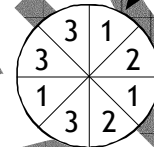
Alle hier erwähnten Begriffe werden noch einmal in Beispiel 7 erläutert.



← **Merke**

Beispiel 7:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Drehen des abgebildeten Glücksrads eine „1“ angezeigt wird?



Lösung:

Das Zufallsexperiment ist das Drehen des Glücksrads. Weil das Glücksrad aus 8 Kreisausschnitten besteht, gibt es bei diesem Zufallsexperimente **8 mögliche Ergebnisse**.

Zu dem **Ereignis E**: „eine 1 wird angezeigt“ gehören 3 Kreisausschnitte, also 3 Ergebnisse.

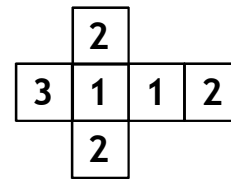
Weil alle Kreisausschnitte gleich groß sind, hat jeder Kreisausschnitt die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Somit erhält man für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E: „eine 1 wird angezeigt“: $P(E) = \frac{3}{8}$

Beispiel 8:

Bei einem Glücksspiel wird ein idealer Würfel mit dem abgebildeten Netz verwendet. Der Würfel wird 1-Mal geworfen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl „2“ fällt?



Lösung:

Von allen 6 Würfelflächen sind 2 Flächen mit einer „1“ beschriftet. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine „1“ zu werfen: $P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

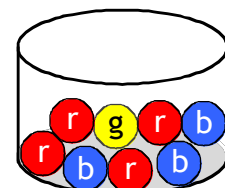
Beispiel 9:

Aus dem abgebildeten Behälter wird ohne hinzusehen eine Kugel gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man eine rote Kugel zieht?

b) Die zuerst gezogene Kugel wird nicht wieder in die Lostrommel zurückgelegt.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, mit dem zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen, wenn zuerst eine gelbe Kugel gezogen wurde?



r = rote Kugel; g = gelbe Kugel
b = blaue Kugel

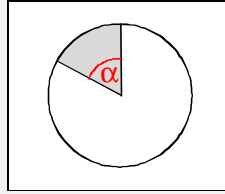
Lösung:

a) Es sind insgesamt 8 Kugeln in dem Behälter. Davon sind 4 Kugeln rot. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Zug eine rote Kugel zu ziehen: $P(\text{rot}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) Nach dem ersten Zug sind nur noch 7 Kugeln in dem Behälter. Wenn beim ersten Zug eine gelbe Kugel gezogen wurde, befinden sich immer noch 4 rote Kugeln in dem Behälter. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit dem zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen: $P(\text{rot}) = \frac{4}{7}$

Glücksräder mit unterschiedlich großen Kreisausschnitten

Wenn in einem Glücksrad die Kreisausschnitte unterschiedlich groß sind, kann man die Wahrscheinlichkeit eines Kreisausschnitts anhand dessen Öffnungswinkels bzw. Mittelpunktswinkels α berechnen.



Es gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Kreisausschnitts mit dem Mittelpunktswinkel α :

$$P(\alpha) = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

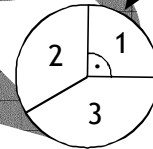
Zur Erinnerung: Der Vollkreis entspricht dem Winkel 360° .



← Tipp

Beispiel 10:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Drehen des Glücksrads eine „1“ angezeigt wird?

**Lösung:**

Der Mittelpunktswinkel des Kreisausschnitts mit der „1“ ist ein rechter Winkel; also $\alpha = 90^\circ$.

Somit ist $P(1) = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} = 25\%$

Hinweis:

Man wandelt den Bruch $\frac{1}{4}$ in einen Prozentsatz $p\%$ um, indem man $p = (1 : 4) \cdot 100 = 25$ rechnet (siehe auch Kapitel 4.5, Seite 31).