Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2016:

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich

Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

- Für die Länge $\overline{CD}$ gilt: $\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE}$. Die Länge $\overline{CE}$ kann im Dreieck EBC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Die Länge $\overline{DE}$ kann im Dreieck AED mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).
- Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC ist die Differenz der Flächeninhalte der Dreiecke AEC und AED. Zur Berechnung der Flächeninhalte A_{AEC} und A_{AED} benötigt man die Längen der Katheten der Dreiecke AEC und AED, die mit der Kosinus- bzw. Sinusfunktion berechnet werden können (siehe Figur 1 und 2).

Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst alle Seitenlängen der Dreiecke EBC und AED berechnen.*

Berechnung der Länge $\overline{CD}$:

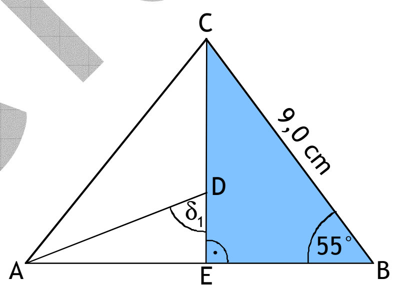
Es gilt: $\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE}$.

→ Berechnung der Länge $\overline{CE}$:

Für $\overline{CE}$ gilt im Dreieck EBC (siehe Figur 1):

$$\sin 55^\circ = \frac{\overline{CE}}{9{,}0} \quad | \cdot 9{,}0$$

$$\Leftrightarrow \quad 7{,}37 = \overline{CE} \text{ bzw. } \mathbf{\overline{CE} = 7{,}37\ cm}$$



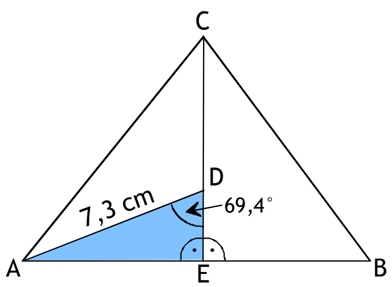
Figur 1

→ Berechnung der Länge $\overline{DE}$:

Für $\overline{DE}$ gilt im Dreieck AED (siehe Figur 2):

$$\cos 69{,}4^\circ = \frac{\overline{DE}}{7{,}3} \quad | \cdot 7{,}3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}57 = \overline{DE} \text{ bzw. } \mathbf{\overline{DE} = 2{,}57\ cm}$$



Figur 2

Für $\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE}$ folgt damit: $\overline{CD} = 7{,}37\text{ cm} - 2{,}57\text{ cm} = \mathbf{4{,}8\ cm}$

Ergebnis: Die Länge $\overline{CD}$ beträgt $\overline{CD} = \underline{4{,}8\text{ cm}}$.

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ADC:

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ADC gilt: $A_{ADC} = A_{AEC} - A_{AED}$

→ Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks AEC:

Es gilt: $A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{CE}$ (siehe Formelsammlung). Die Länge $\overline{CE} = 7{,}37$ cm wurde bereits oben berechnet. Die Länge $\overline{AE}$ kann im Dreieck AED mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt: $\sin 69{,}4^\circ = \frac{\overline{AE}}{7{,}3} \quad | \cdot 7{,}3$

$$\Leftrightarrow \quad 6{,}83 = \overline{AE} \text{ bzw. } \overline{AE} = 6{,}83\text{ cm}$$

Damit erhält man: $A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}83 \cdot 7{,}37 = \underline{25{,}17\text{ cm}^2}$

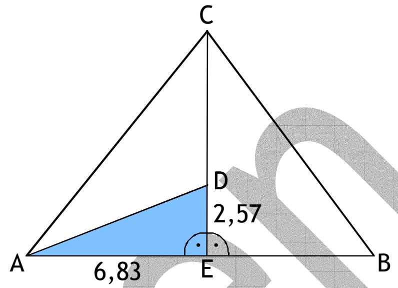
Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich

→ Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks AED:

Es gilt: $A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{DE}$ (siehe Formelsammlung)

Die beiden Längen $\overline{AE} = 6{,}83$ cm und $\overline{DE} = 2{,}57$ cm wurden bereits oben berechnet. Damit erhält man:

$A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}83 \cdot 2{,}57 = \underline{8{,}78\ \text{cm}^2}$



Figur 3

Damit folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks ADC:

$A_{ADC} = 25{,}17\ \text{cm}^2 - 8{,}78\ \text{cm}^2 = \mathbf{16{,}39\ cm^2}$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC beträgt $\underline{\mathbf{A_{ADC} = 16{,}39\ cm^2}}$.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

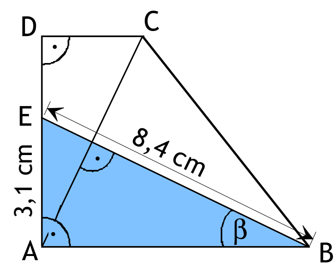
Für den Umfang des Dreiecks ACD gilt: $u = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD}$. Da nicht so leicht zu erkennen ist, wie man aus den angegebenen Längen diese drei Strecken berechnen kann, sollte man zunächst mit $\overline{AE} = 3{,}1$ cm und $\overline{BE} = 8{,}4$ cm im Dreieck ABE die Länge $\overline{AB}$ und den Winkel β berechnen (siehe Figur 1). Anschließend muss man beachten, dass die Strecke $\overline{BE}$ die Strecke $\overline{AC}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC halbiert.

- Dann kann man die Strecke $\overline{AC}$ mit $\overline{AC} = 2\,\overline{AM}$ berechnen. Die Länge $\overline{AM}$ erhält man im Dreieck ABM mit der Sinusfunktion (siehe Figur 2).
- Die Längen $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ kann man im Dreieck ACD mit der Strecke $\overline{AC}$ und der Sinus- bzw. Kosinusfunktion berechnen, wenn man den Winkel α_1 kennt (siehe Figur 3 und 4). Weil das Trapez ABCD rechtwinklig ist, gilt: $\alpha_1 = 90° - \alpha_2$ (siehe Figur 3). Den Winkel α_2 erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABM.

Für den Umfang des Dreiecks ACD gilt: $u = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD}$

Berechnung der Länge $\overline{AC}$:

Zunächst sollte man im Dreieck ABE mit den angegebenen Längen $\overline{AE} = 3{,}1$ cm und $\overline{BE} = 8{,}4$ cm die Länge $\overline{AB}$ und den Winkel β berechnen (siehe Figur 1).



Figur 1

- Mit dem Satz des Pythagoras erhält man für die Länge $\overline{AB}$:

$3{,}1^2 + \overline{AB}^2 = 8{,}4^2 \quad | -3{,}1^2$

$\Leftrightarrow \quad \overline{AB}^2 = 8{,}4^2 - 3{,}1^2$

$\Leftrightarrow \quad \overline{AB}^2 = 60{,}95 \quad | \sqrt{\ }$

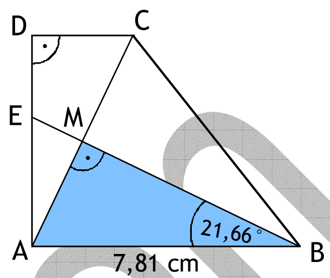
$\Rightarrow \quad \overline{AB} = \underline{7{,}81\ \text{cm}}$

- Für den Winkel β gilt (siehe Figur 1): $\sin\beta = \frac{3{,}1}{8{,}4} \quad | \sin^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\beta = 21{,}66°}$

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich

Weil nun das Dreieck ABC laut Aufgabenstellung gleichschenklig ist, wird seine Basis $\overline{AC}$ von der Strecke $\overline{BE}$ halbiert. Die Länge $\overline{AM}$ kann im Dreieck ABM mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:



Figur 2

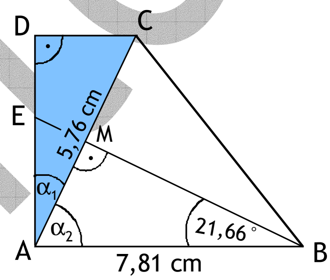
$$\sin 21{,}66^\circ = \frac{\overline{AM}}{7{,}81} \quad | \cdot 7{,}81$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}88 = \overline{AM} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AM} = 2{,}88 \text{ cm}$$

Mit $\overline{AC} = 2\,\overline{AM}$ erhält man: $\mathbf{\overline{AC} = 5{,}76\ cm}$

<u>Berechnung der Längen $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$:</u>

Die Längen $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ können nun im Dreieck ACD mit $\overline{AC} = 5{,}76$ cm und der Sinus- bzw. Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel α_1 kennt (siehe Figur 3).



Figur 3

→ <u>Berechnung des Winkels α_1:</u>

Weil das rechtwinklige Trapez ABCD bei der Ecke A einen rechten Winkel hat, gilt: $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha_2$

Den Winkel α_2 erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABM. Darin gilt:

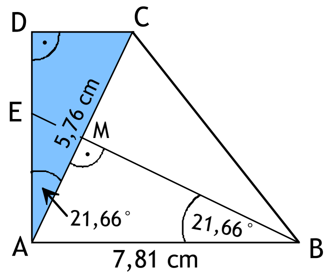
$$21{,}66^\circ + 90^\circ + \alpha_2 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad 111{,}66^\circ + \alpha_2 = 180^\circ \quad | -111{,}66^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_2 = 68{,}34^\circ$$

Für α_1 folgt damit: $\alpha_1 = 90^\circ - 68{,}34^\circ = 21{,}66^\circ$

Mit $\alpha_1 = 21{,}66^\circ$ gilt nun im Dreieck ACD (siehe Figur 4):



Figur 4

$$\sin 21{,}66^\circ = \frac{\overline{CD}}{5{,}76} \quad | \cdot 5{,}76$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}13 = \overline{CD} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{CD} = 2{,}13\ cm}$$

Außerdem gilt:

$$\cos 21{,}66^\circ = \frac{\overline{AD}}{5{,}76} \quad | \cdot 5{,}76$$

$$\Leftrightarrow \quad 5{,}35 = \overline{AD} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{AD} = 5{,}35\ cm}$$

Mit $\overline{AC} = 5{,}76$ cm, $\overline{CD} = 2{,}13$ cm und $\overline{AD} = 5{,}35$ cm erhält man schließlich für den Umfang des Dreiecks ACD :

u = 5,76 cm + 2,13 cm + 5,35 cm = **13,24 cm**

<u>Ergebnis:</u> Der Umfang der Dreiecks ACD beträgt **<u>u = 13,24 cm</u>**.

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich

Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:
Zur Berechnung des Zylindervolumens V_{Zyl} und des Kegelvolumens V_{Ke} benötigt man den Radius r der beiden Grundflächen, die Zylinderhöhe h_{Zyl} und die Kegelhöhe h_{Ke}. Diese drei Größen können berechnet werden, wenn man die angegebenen Größen in die Mantelformeln von Zylinder und Kegel und in den Satz des Pythagoras für das rechtwinklige „Kegeldreieck" einsetzt (siehe Figur 1).

Berechnung des Zylindervolumens V_{Zyl} und des Kegelvolumens V_{Ke}:

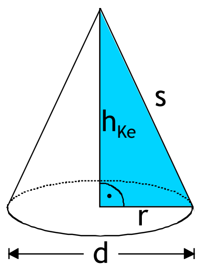
Es gilt (siehe Formelsammlung): $V_{Zyl} = \pi\, r^2 \cdot h_{Zyl}$ und $V_{Ke} = \frac{1}{3}\pi\, r^2 \cdot h_{Ke}$

Den Radius r, die Zylinderhöhe h_{Zyl} und die Kegelhöhe h_{Ke} kann man berechnen, indem man die angegebenen Größen $M_{Zyl} = M_{Ke} = 340\ cm^2$ und s = 18,0 cm in die folgenden Formeln einsetzt:

(I) $M_{Zyl} = 2\pi \cdot r \cdot h_{Zyl}$

(II) $M_{Ke} = \pi \cdot r \cdot s$

(III) $h_{Ke}^2 + r^2 = s^2$ (siehe Figur 1, Satz des Pythagoras)



Figur 1

Einsetzen von $M_{Zyl} = M_{Ke} = 340\ cm^2$ und s = 18,0 cm ergibt:

(Ia) $340 = 2\pi \cdot r \cdot h_{Zyl}$

(IIa) $340 = \pi \cdot r \cdot 18$

(IIIa) $h_{Ke}^2 + r^2 = 18^2$

$\rightarrow$ Berechnung des Radius' r:

Aus Formel (IIa) kann nun der Radius r berechnet werden:

$340 = \pi \cdot r \cdot 18 \quad | :(18\pi)$

$\Leftrightarrow\ 6{,}01 = r$ bzw. $r = 6{,}01\ cm$

$\rightarrow$ Berechnung der Zylinderhöhe h_{Zyl}:

Einsetzen von r = 6,01 cm in die Formel (Ia) ergibt:

$340 = 2\pi \cdot 6{,}01 \cdot h_{Zyl}$

$\Leftrightarrow\ 340 = 12{,}02\pi \cdot h_{Zyl} \quad | :(12{,}02\pi)$

$\Leftrightarrow\ 9{,}00 = h_{Zyl}$ bzw. $h_{Zyl} = 9{,}00\ cm$

$\rightarrow$ Berechnung der Kegelhöhe h_{Ke}:

Einsetzen von r = 6,01 cm in die Formel (IIIa) ergibt:

$h_{Ke}^2 + 36{,}12 = 324 \quad | -36{,}12$

$\Leftrightarrow\ h_{Ke}^2 = 287{,}88 \quad | \sqrt{\ }$

$\Rightarrow\ h_{Ke} = 16{,}97\ cm$

Mit r = 6,01 cm und $h_{Zyl} = 9{,}00$ cm erhält man: $V_{Zyl} = 1021{,}27\ cm^3$

Mit r = 6,01 cm und $h_{Ke} = 16{,}97$ cm erhält man: $V_{Ke} = 641{,}89\ cm^3$. Damit ist: $\mathbf{V_{Zyl} - V_{Ke} = 379{,}38\ cm^3}$

Ergebnis: Die Differenz der beiden Rauminhalte beträgt **379,38 cm^3**.

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich

Aufgabe P4:

Vervollständigter Boxplot zur Preisliste der Frauenschuhe:

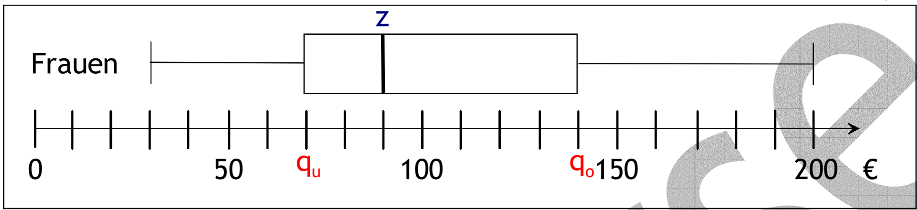
Um den Boxplot vervollständigen zu können, muss man noch den Zentralwert, das untere Quartil und das obere Quartil berechnen. Mit n = 17 und der Rangliste

30 ; 30 ; 50 ; 60 ; **70** ; 70 ; 80 ; 90 ; **90** ; 100 ; 120 ; 140 ; **140** ; 150 ; 160 ; 180 ; 200 erhält man:

Zentralwert: Wegen $17 \cdot \frac{1}{2} = 8{,}5$ muss man am 9. Platz der Rangliste nachschauen: **z = 90 €**

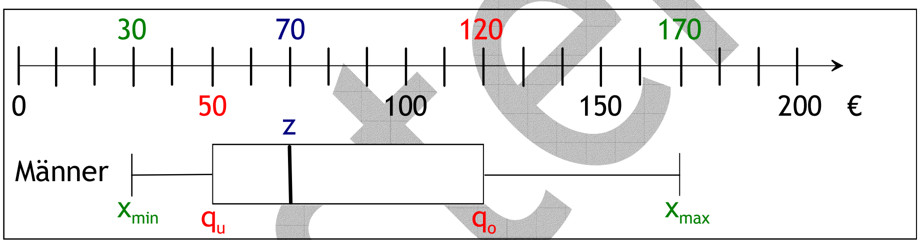
Unteres Quartil: Wegen $17 \cdot \frac{1}{4} = 4{,}25$ muss man am 5. Platz der Rangliste nachschauen: **q_u = 70 €**

Oberes Quartil: Wegen $17 \cdot \frac{3}{4} = 12{,}75$ muss man am 13. Platz der Rangliste nachschauen: **q_o = 140 €**



Passende Werte für die Rangliste der Preise der Männerschuhe:

Zunächst muss man im Boxplot die charakteristischen Werte x_{min} , x_{max} , z, q_u und q_o ablesen.



Man erhält: **x_{min} = 30**, **x_{max} = 170**, **z = 70**, **q_u = 50** und **q_o = 120**

Um damit die Rangliste der Preise der Männerschuhe ergänzen zu können, muss man wissen, an welchen Rängen das untere Quartil q_u, der Zentralwert z und das obere Quartil q_o stehen. Mit n = 13 erhält man:

Zentralwert z: $13 \cdot \frac{1}{2} = 6{,}5$. Also muss **z = 70** am 7. Platz der Rangliste stehen.

Unteres Quartil q_u: $13 \cdot \frac{1}{4} = 3{,}25$. Also muss **$q_u$ = 50** am 4. Platz der Rangliste stehen.

Oberes Quartil q_o: $13 \cdot \frac{3}{4} = 9{,}75$. Also muss **$q_o$ = 120** am 10. Platz der Rangliste stehen.

Ergebnis:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Preis	**30**	30		**50**	50	60	**70**			**120**	120	140	**170**

Für den **Rang 3** passen alle Werte **zwischen 30 € und 50 €.**

Für die **Ränge 8 und 9** kommen Werte **zwischen 70 € und 120 €** in Frage, wobei der Preis des 9. Rangs nicht kleiner sein darf als der Preis des 8. Rangs.