Vorwort:

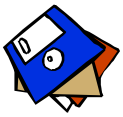
Sehr geehrte Schülerinnen und Schüler,

die folgenden Kapitel möchten Ihnen wertvolle Tipps und Tricks vermitteln, um die Prüfungsaufgaben in Mathematik möglichst erfolgreich bearbeiten zu können.

Jedes Kapitel beginnt mit den wichtigsten Regeln und Kenntnissen zum jeweiligen Thema. Diese Regeln und Kenntnisse sollten Sie unbedingt „draufhaben“. Die dabei erwähnten Formeln können Sie selbstverständlich auch in der Formelsammlung nachschlagen. Für den neuen Pflichtteil A1 müssen Sie allerdings auch einige Formeln und Regeln auswendig wissen. Welche Formeln dies sind, finden Sie in der Datei <Formeln-A1.pdf>.

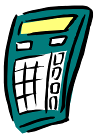
Im Anschluss an jeden Regelkasten wird anhand einer typischen Prüfungsaufgabe Schritt für Schritt ein Lösungsweg vorgestellt. Die einzelnen Schritte sind dabei so ausführlich beschrieben, dass Sie den Lösungsweg sicher mühelos nachvollziehen können.

Zu Ihrer Orientierung noch ein paar Anmerkungen zu folgenden Symbolen:



Diese Regeln und Kenntnisse sollten Sie sich einprägen.

Die Glühbirne weist auf Tipps, wertvolle Rechentricks und typische Stolperfallen hin.



In den durch das Taschenrechner-Symbol gekennzeichneten Kästen stehen Tipps zum Umgang mit dem Taschenrechner.

© Mathematik-Verlag, https://matheverlag.com

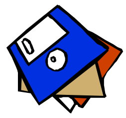
Inhaltsverzeichnis:

© Mathematik-Verlag, https://matheverlag.com

1. Algebra

1.1. Rechnen mit Potenzen:

- Die **Potenzschreibweise:** $\mathbf{a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}$ (Produkt mit n Faktoren „a“)
  In a^n heißt a die Grundzahl oder Basis und n die Hochzahl oder der Exponent.
- **Erstes Potenzgesetz** (gleiche Basis): $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ und $\mathbf{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$
- **Zweites Potenzgesetz** (gleiche Hochzahlen):
  $\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ und $\mathbf{\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$ und rückwärts: $\mathbf{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ und $\mathbf{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$
- **Drittes Potenzgesetz** (Potenzieren von Potenzen): $\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$
- **Spezialfälle:** $\mathbf{1^n = 1}$ und $\mathbf{a^0 = 1}$



← **Merke**

Beispiel 1: Schreiben Sie die Zahl jeweils als Potenz: a) 16 b) 64 c) 25 d) 27 e) 81

Lösung: a) $16 = 2^4$ b) $64 = 2^6$ c) $25 = = 5^2$ d) $27 = = 3^3$ e) $81 = = 3^4$

Tipp: Folgende Potenzen zu den Grundzahlen 2; 3 und 5 sollte man auswendig wissen:
$\mathbf{8 = 2^3}$; $\mathbf{16 = 2^4}$; $\mathbf{32 = 2^5}$; $\mathbf{64 = 2^6}$; $\mathbf{27 = 3^3}$; $\mathbf{81 = 3^4}$; $\mathbf{25 = 5^2}$; $\mathbf{125 = 5^3}$
Außerdem sollte man alle Quadratzahlen bis 100 auswendig wissen: 4; 9; 16; 25; 36; ...

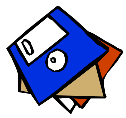
Beispiel 2: Fassen Sie zusammen soweit wie möglich: a) $3^4 \cdot 3^2$ b) $8 \cdot 2^5$ c) $5^4 \cdot 25$ d) $\dfrac{2^6}{16}$

Lösung: a) $3^4 \cdot 3^2 = 3^6$ b) $8 \cdot 2^5 = 2^3 \cdot 2^5 = 2^8$ c) $5^4 \cdot 25 = 5^4 \cdot 5^2 = 5^6$ d) $\dfrac{2^6}{16} = \dfrac{2^6}{2^4} = 2^2 = 4$

Beispiel 3: Zerlegen Sie die Grundzahl in Primfaktoren und schreiben Sie als Produkt zweier Potenzen:
a) 15^4 b) 6^5 c) 10^4

Lösung:
a) $15^4 = (3 \cdot 5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$ b) $6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$ c) $10^4 = (2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$

- Für **Potenzen mit negativer Hochzahl** gilt: $\mathbf{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$



← **Merke**

Beispiel 4: Schreiben Sie folgende Terme so um, dass nur positive Hochzahlen vorkommen:
a) 7^{-2} b) $3^{-4} \cdot 2^3$ c) $2^{-5} \cdot 5^{-2}$

Lösung:
a) $7^{-2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$ b) $3^{-4} \cdot 2^3 = \dfrac{2^3}{3^4}$ c) $2^{-5} \cdot 5^{-2} = \dfrac{1}{2^5 \cdot 5^2}$

- **Dezimalzahlen wie 0,1; 0,001 und 0,0 … 01** können als Potenzen mit 10 als Grundzahl geschrieben werden. Wenn die „1“ an der n-ten Stelle nach dem Komma steht, gilt: $\mathbf{0{,}0 \ldots 01 = 10^{-n}}$
- Für **Dezimalzahlen wie 0,02** gilt: $\mathbf{0{,}02 = 2 \cdot 0{,}01 = 2 \cdot 10^{-2}}$

© Mathematik-Verlag, https://matheverlag.com

Beispiel 5: Schreiben Sie als Potenz bzw. als Produkt zwischen einer ganzen Zahl und einer Potenz:

a) 0,00001 b) 0,03 c) 0,000005 d) 0,08

Lösung:

a) $0{,}00001 = 10^{-5}$ b) $0{,}03 = 3 \cdot 0{,}01 = 3 \cdot 10^{-2}$

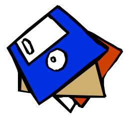
c) $0{,}000005 = 5 \cdot 0{,}000001 = 5 \cdot 10^{-6}$ d) $0{,}08 = = 8 \cdot 0{,}01 = 8 \cdot 10^{-2} = 2^3 \cdot 10^{-2}$

1.2. Rechnen mit Wurzeln:

Definition: $\sqrt{a}$ ist diejenige positive Zahl b, für die gilt: $b^2 = a$; mit $a > 0$.

Es gilt: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \mathbf{a}$ und $\sqrt{a^2} = \mathbf{a}$

Man nennt $\sqrt{a}$ auch „Wurzel von a" oder „Quadratwurzel von a".

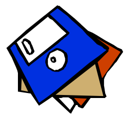


← **Merke**

Beispiel 1: Berechnen Sie im Kopf: a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{49}$ c) $\left(\sqrt{7}\right)^2$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

Lösung: a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{49} = 7$ c) $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

Multiplikation und Division von Wurzeln: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$



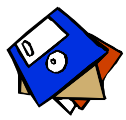
← **Merke**

Beispiel 2: Vereinfachen Sie soweit wie möglich: a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ c) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

Lösung:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$ c) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{5}} = \sqrt{4} = 2$

Teilweises Wurzelziehen: $\sqrt{\mathbf{a}^2 \cdot b} = \mathbf{a} \cdot \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{b \cdot \mathbf{a}^2} = \mathbf{a} \cdot \sqrt{b}$

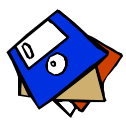


← **Merke**

Beispiel 3: Ziehen Sie die Wurzel soweit wie möglich: a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{32}$ c) $\sqrt{75}$

Lösung: a) $\sqrt{20} = \sqrt{\mathbf{4} \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot \mathbf{16}} = 4\sqrt{2}$ c) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot \mathbf{25}} = 5\sqrt{3}$

Nenner rational machen: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{\mathbf{b}}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{\mathbf{b}}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$



← **Merke**

Beispiel 4:

Machen Sie den Nenner rational und kürzen Sie soweit wie möglich: a) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{20}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{14}{\sqrt{7}}$

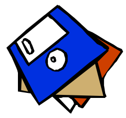
Lösung:

a) $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\mathbf{6}}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{\mathbf{6}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20 \cdot \sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{20 \cdot \sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$ c) $\frac{14}{\sqrt{7}} = \frac{14 \cdot \sqrt{\mathbf{7}}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{\mathbf{7}}} = \frac{14 \cdot \sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}$

© Mathematik-Verlag, https://matheverlag.com

1.3. Gleichungssysteme und ihre Lösung:

> Zwei oder mehrere Gleichungen, in denen die Variablen x und y vorkommen, bilden ein **Gleichungssystem**.
>
> Die **Lösungsmenge** eines solchen Gleichungssystems ist dasjenige Wertepaar (x ; y), für das beide Gleichungen erfüllt sind.



← **Merke**

Beispiel: Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$2(y-2) = 4(x-3) \qquad \text{(I)}$$
$$3(y+4) = 3(x+5) \qquad \text{(II)}$$

Lösung:

Gleichungssysteme können mit drei verschiedenen Verfahren gelöst werden: dem Additionsverfahren, dem Gleichsetzungsverfahren und dem Einsetzungsverfahren. Welches Verfahren Sie anwenden, bleibt ihnen überlassen.

Variante 1: Additionsverfahren

1. Schritt: *Umformen der Gleichungen*

Zunächst sollte man beide Gleichungen in die Form $ax + by = c$ bringen (mit $a, b, c \in R$) und übereinander schreiben. Im obigen Beispiel erhält man:

Gleichung (I):

$$2(y-2) = 4(x-3)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2y - 4 = 4x - 12 \quad | -4x + 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{-4x + 2y = -8}$$

Gleichung (II):

$$3(y+4) = 3(x+5)$$
$$\Leftrightarrow \quad 3y + 12 = 3x + 15 \quad | -3x - 12$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{-3x + 3y = 3}$$

2. Schritt: *Multiplikation mit geeigneten Faktoren*

Nun multipliziert man eine bzw. beide Gleichungen mit solchen Faktoren, dass eine Variable in beiden Gleichungen den gleichen Vorfaktor hat, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen. In unserem Beispiel erreicht man dies, indem man Gleichung (I) mit dem Faktor 3 und die Gleichung (II) mit dem Faktor (–4) multipliziert:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & -4x + 2y = -8 & | \cdot 3 \\ \text{(II)} & -3x + 3y = 3 & | \cdot(-4) \\ \hline \text{(I)} & -12x + 6y = -24 & \\ \text{(II)} & 12x - 12y = -12 & \end{array}$$

3. Schritt: *Addition beider Gleichungen*

Nun addiert man beide Gleichungen „von oben nach unten“. Dadurch fällt in der resultierenden Gleichung eine Variable heraus. In unserem Beispiel ist dies die x-Variable:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -12x + 6y = -24 \\ \text{(II)} & 12x - 12y = -12 \\ \hline \text{(I)} + \text{(II)}: & -6y = -36 \end{array}$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhält man den Wert für die y-Variable: **y = 6**

4. Schritt: *Berechnung der zweiten Variable*

Den Wert für die x-Variable berechnet man, indem man den y-Wert in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen einsetzt und nach x auflöst. Einsetzen von **y = 6** in $-4x + 2y = -8$ ergibt:

$$-4x + 2 \cdot 6 = -8$$
$$\Leftrightarrow \quad -4x + 12 = -8 \quad | -12$$
$$\Leftrightarrow \quad -4x = -20 \quad | :(-4)$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 5}$$

Damit lautet die Lösungsmenge: **L = { 5 ; 6 }**

© Mathematik-Verlag, https://matheverlag.com