Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2013:

Lösungen zur Prüfung 2013: Pflichtbereich

Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

Die Strecke $\overline{AD}$ setzt sich aus den Teilstrecken $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ zusammen. Die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ können in den Dreiecken ABE bzw. ECD berechnet werden, wenn man die Winkel ε_1 und ε_2 und die Strecken $\overline{EB}$ und $\overline{EC}$ kennt (siehe Figur 1). Die Strecken $\overline{EB}$ und $\overline{EC}$ können im Dreieck BCE berechnet werden. Damit kann dann im Dreieck ABE der Winkel ε_1 berechnet werden, woraus sich dann auch der Winkel ε_2 ergibt.

Berechnung der Länge der Strecke $\overline{AD}$:

Für die Strecke $\overline{AD}$ gilt: $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{DE}$.
Die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ können in den Dreiecken ABE und ECD berechnet werden, wozu man die Strecken $\overline{EB}$ und $\overline{EC}$ und die Winkel ε_1 und ε_2 benötigt.

→ Berechnung der Strecken $\overline{EB}$ und $\overline{EC}$:

Für $\overline{EB}$ gilt im Dreieck EBC (siehe Figur 1):

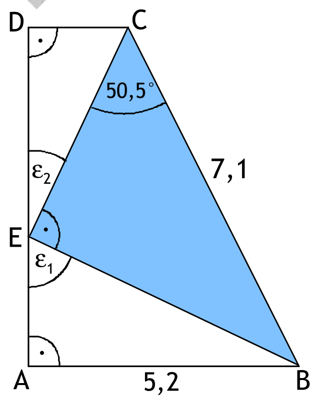
$$\sin 50{,}5^\circ = \frac{\overline{EB}}{7{,}1} \qquad | \cdot 7{,}1$$

$$\Leftrightarrow \quad 5{,}48 = \overline{EB} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{EB} = 5{,}48\ cm}$$

Für $\overline{EC}$ gilt im Dreieck EBC (siehe Figur 1):

$$\cos 50{,}5^\circ = \frac{\overline{EC}}{7{,}1} \qquad | \cdot 7{,}1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4{,}52 = \overline{EC} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{EC} = 4{,}52\ cm}$$



Figur 1

→ Berechnung der Winkel ε_1 und ε_2:

Im Dreieck ABE gilt (siehe Figur 2):

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{5{,}2}{5{,}48}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin \varepsilon_1 = 0{,}949 \qquad | \sin^{-1}$$

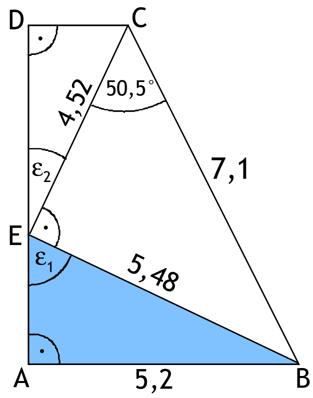
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon_1 = 71{,}6^\circ}$$

Mit der Beziehung $\varepsilon_1 + 90^\circ + \varepsilon_2 = 180^\circ$ kann nun auch ε_2 berechnet werden:

$$71{,}6^\circ + 90^\circ + \varepsilon_2 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad 161{,}6^\circ + \varepsilon_2 = 180^\circ \qquad | -161{,}6^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon_2 = 18{,}4^\circ}$$



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2013: Pflichtbereich

→ Berechnung der Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$:

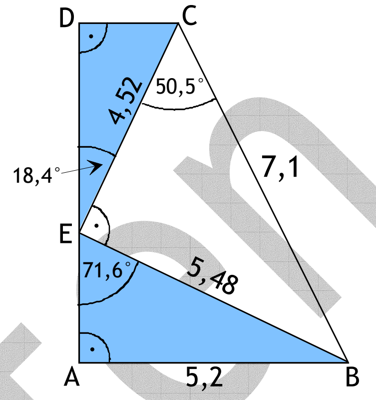
Die Strecke $\overline{AE}$ kann im Dreieck ABE mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 3):

$$5{,}48^2 = 5{,}2^2 + \overline{AE}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 30{,}03 = 27{,}04 + \overline{AE}^2 \quad | -27{,}04$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}99 = \overline{AE}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}73 = \overline{AE} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{AE} = 1{,}73\ cm}$$



Figur 3

Die Strecke $\overline{DE}$ kann im Dreieck ECD mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Es gilt:

$$\cos 18{,}4^\circ = \frac{\overline{DE}}{4{,}52} \quad | \cdot 4{,}52$$

$$\Leftrightarrow \quad 4{,}29 = \overline{DE} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{DE} = 4{,}29\ cm}$$

Für die gesuchte Strecke $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{DE}$ erhält man somit: $\mathbf{\overline{AD} = 6{,}02\ cm}$

Ergebnis: Die Länge der Strecke $\overline{AD}$ beträgt $\overline{AD}$ = **6,02 cm**.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

- Der Winkel ε kann mithilfe der Summe der Innenwinkel im Dreieck AEF berechnet werden. Der dazu benötigte Winkel α_2 (siehe Figur 1) kann leicht aus $\alpha_1 = 34{,}0^\circ$ bestimmt werden.
- Für die Strecke $\overline{EG}$ gilt: $\overline{EG} = \overline{EF} - \overline{FG}$. Die Strecke $\overline{EF}$ kann im Dreieck AEF mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{AF}$ kennt, die wiederum im Dreieck AFD berechnet werden kann (siehe Figur 2 und 3). Die Strecke $\overline{FG}$ kann im Dreieck FGC mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel ∢GFC und die Strecke $\overline{FC}$ kennt (siehe Figur 4).
Man beachte für die Berechnung von $\overline{FC}$, dass die Seiten des Quadrats ABCD alle gleich lang sind, nämlich 5,0 cm. Somit gilt: $\overline{FC} = 5{,}0 - \overline{DF}$.
Die Strecke $\overline{DF}$ kann im Dreieck AFD mit der Tangensfunktion berechnet werden.

Berechnung des Winkels ε:

Für die Summe der Innenwinkel im Dreieck AEF gilt:

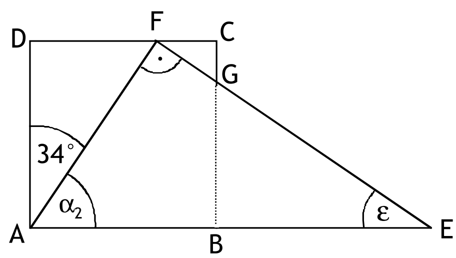
$$\alpha_2 + \varepsilon + 90^\circ = 180^\circ$$

Da der Winkel ∢BAD rechtwinklig ist, gilt: $\alpha_2 = 90^\circ - 34{,}0^\circ = 56^\circ$

Damit folgt: $56^\circ + \varepsilon + 90^\circ = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow \quad 146^\circ + \varepsilon = 180^\circ \quad | -146^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\varepsilon = 34{,}0^\circ}$$



Figur 1

Ergebnis: Der Winkel ε beträgt **34,0°**.

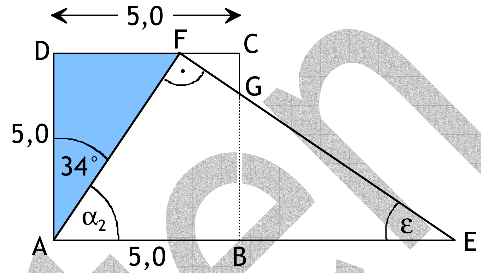
Lösungen zur Prüfung 2013: Pflichtbereich

Berechnung der Länge von $\overline{EG}$:

Für die Strecke $\overline{EG}$ gilt: $\mathbf{\overline{EG} = \overline{EF} - \overline{FG}}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{EF}$:

Die Strecke $\overline{EF}$ kann im Dreieck AEF mit der Tangensfunktion berechnet werden. Dazu benötigt man aber noch die Strecke $\overline{AF}$, die im Dreieck AFD mit der Kosinusfunktion berechnet werden kann. Im Dreieck AFD gilt (siehe Figur 2):



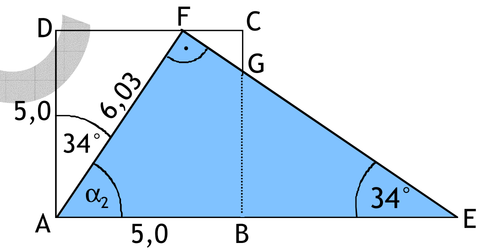
Figur 2

$$\cos 34^\circ = \frac{5{,}0}{\overline{AF}} \quad | \cdot \overline{AF}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AF} \cdot \cos 34^\circ = 5{,}0 \quad | : \cos 34^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AF} = \underline{6{,}03 \text{ cm}}$$

Mit $\overline{AF} = 6{,}03$ cm kann nun im Dreieck AEF die Strecke $\overline{EF}$ berechnet werden (siehe Figur 3). Es gilt:



Figur 3

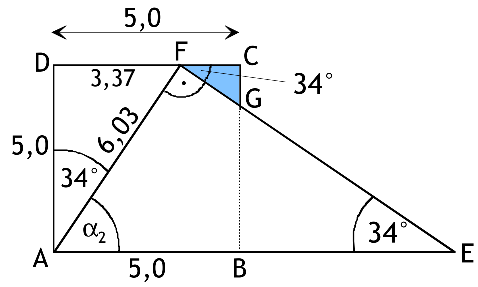
$$\tan 34^\circ = \frac{6{,}03}{\overline{EF}} \quad | \cdot \overline{EF}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{EF} \cdot \tan 34^\circ = 6{,}03 \quad | : \tan 34^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\overline{EF} = 8{,}94 \text{ cm}}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{FG}$:

Die Strecke $\overline{FG}$ kann im Dreieck FGC mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel $\sphericalangle$GFC und die Strecke $\overline{FC}$ kennt (siehe Figur 4).



Figur 4

Für die Strecke $\overline{FC}$ gilt: $\overline{FC} = 5{,}0 - \overline{DF}$

Für $\overline{DF}$ gilt (siehe Figur 3):

$$\tan 34^\circ = \frac{\overline{DF}}{5{,}0} \quad | \cdot 5{,}0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3{,}37 = \overline{DF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{DF} = 3{,}37 \text{ cm}$$

Damit ist $\overline{FC} = 1{,}63$ cm

Da der Winkel $\sphericalangle$GFC ein Wechselwinkel zu $\varepsilon = 34^\circ$ ist, gilt: $\sphericalangle GFC = 34^\circ$.

Mit $\overline{FC} = 1{,}63$ cm und $\sphericalangle GFC = 34^\circ$ kann nun $\overline{FG}$ im Dreieck FGC mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Es gilt (siehe Figur 4):

$$\cos 34^\circ = \frac{1{,}63}{\overline{FG}} \quad | \cdot \overline{FG}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{FG} \cdot \cos 34^\circ = 1{,}63 \quad | : \cos 34^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\overline{FG} = 1{,}97 \text{ cm}}$$

Mit $\overline{EF} = 8{,}94$ cm und $\overline{FG} = 1{,}97$ cm erhält man schließlich: $\mathbf{\overline{EG} = 6{,}97 \text{ cm}}$

Ergebnis: Die Länge von $\overline{EG}$ beträgt $\mathbf{\overline{EG}} = \underline{\mathbf{6{,}97 \text{ cm}}}$.

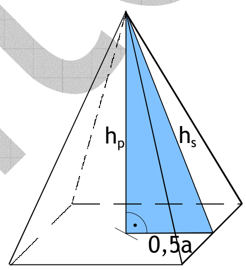
Lösungen zur Prüfung 2013: Pflichtbereich

Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:
Die Pyramidenhöhe h_p kann im rechtwinkligen Dreieck der Figur 1 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Die dazu benötigten Längen a und h_s können aus der Vorgabe bestimmt werden, dass sowohl die Mantelflächen von Zylinder und Doppelkegel als auch die Umfänge der Grundflächen gleich groß sind. Durch Gleichsetzen der Umfänge der Grundflächen erhält man die Länge a. Durch Gleichsetzen beider Mantelflächen kann man die Seitenhöhe h_s der Pyramide berechnen, wenn man die Zylinderhöhe h_z kennt. Die Zylinderhöhe h_z schließlich kann aus dem Volumen und dem Radius des Zylinders berechnet werden.

Berechnung der Höhe der Pyramide:

Die Pyramidenhöhe h_p kann im markierten Dreieck mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 1). Es gilt: $\mathbf{h_s^2 = h_p^2 + (0{,}5a)^2}$



Figur 1

→ Berechnung der Kantenlänge a:

Die Kantenlänge a kann mit der Vorgabe berechnet werden, dass die Umfänge der Grundflächen von Zylinder und Pyramide gleich groß sind. Die Grundfläche des Zylinders ist ein Kreis mit dem Radius r_z = 3,8 cm. Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit der Kantenlänge a. Somit muss gelten: $\mathbf{2\pi \cdot r_z = 4a}$

Mit r_z = 3,8 cm folgt: $23{,}88 = 4a \quad | :4$

$\Leftrightarrow \quad 5{,}97 = a$ bzw. $\mathbf{a = 5{,}97\ cm}$

→ Berechnung der Seitenhöhe h_s:

Aus der Vorgabe, dass beide Mantelflächen gleich groß sind, folgt (siehe Formelsammlung): $\mathbf{2\pi \cdot r_z \cdot h_z = 2a \cdot h_s}$

Einsetzen von r_z = 3,8 cm und a = 5,97 cm ergibt: $\mathbf{23{,}88 \cdot h_z = 11{,}94 \cdot h_s}$

Die Zylinderhöhe h_z wiederum kann mit dem angegebenen Volumen V_z = 220 cm³ des Zylinders berechnet werden. Es gilt (siehe Formelsammlung): $\mathbf{V_z = \pi \cdot r_z^2 \cdot h_z}$

Mit r_z = 3,8 cm und V_z = 220 cm³ folgt:

$220 = 45{,}36 \cdot h_z \quad | :45{,}36$

$\Leftrightarrow \quad 4{,}85 = h_z$ bzw. $\mathbf{h_z = 4{,}85\ cm}$

Einsetzen von h_z = 4,85 cm in die Gleichung $23{,}88 \cdot h_z = 11{,}94 \cdot h_s$ ergibt:

$115{,}82 = 11{,}94 \cdot h_s \quad | :11{,}94$

$\Leftrightarrow \quad 9{,}70 = h_s$ bzw. $\mathbf{h_s = 9{,}70\ cm}$

Einsetzen von a = 5,97 cm und h_s = 9,70 cm in die Gleichung $\mathbf{h_s^2 = h_p^2 + (0{,}5a)^2}$ ergibt schließlich:

$94{,}09 = h_p^2 + 8{,}91 \quad | -8{,}91$

$\Leftrightarrow \quad 85{,}18 = h_p^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\Rightarrow \quad 9{,}23 = h_p$ bzw. $\mathbf{h_p = 9{,}23\ cm}$

Ergebnis: Die Pyramidenhöhe beträgt $\underline{\mathbf{h_p = 9{,}23\ cm}}$.