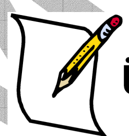
Satzgruppe des Pythagoras:

Inhalt:

Die vorliegenden Folienvorlagen enthalten folgende Elemente:

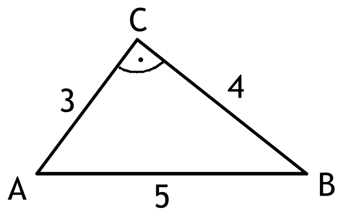
 **Beispiel:**	Anhand von Beispielen werden neue Regeln, Definitionen und Kenntnisse eingeführt. Die Aufgaben in den Beispielen sind meist so gestellt, dass sie von den Schülerinnen und Schülern auch selbstständig bearbeitet werden können.
Merke: 	Die „*Merkekästen*“ stehen meist im Anschluss an ein einführendes Beispiel und fassen wichtige Regeln, Definitionen und Kenntnisse zusammen. Sie sollten von den Schülerinnen und Schülern unbedingt abgeschrieben werden.
 **Übung:**	Hier können die Schülerinnen und Schüler die gelernten Regeln und Kenntnisse üben und festigen. Im Anschluss an die Übungsaufgaben finden Sie jeweils die ausführlichen Lösungen dazu.

1. Der Satz des Pythagoras

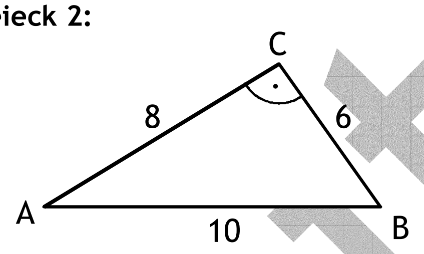
Beispiel 1:

Berechne zu den rechtwinkligen Dreiecken die Quadrate der Seitenlängen.
Was fällt auf, wenn du die Quadrate der Seitenlängen miteinander vergleichst ?

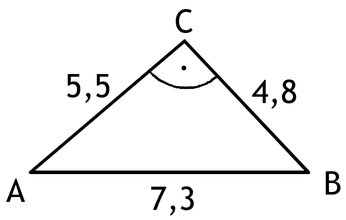
Dreieck 1:



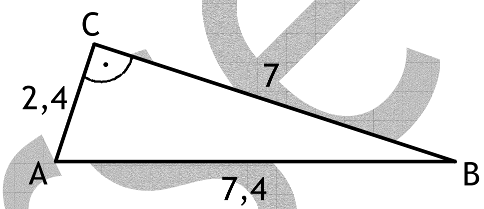
Dreieck 2:



Dreieck 3:



Dreieck 4:



	a	b	c	a^2	b^2	c^2
Dreieck 1:						
Dreieck 2:						
Dreieck 3:						
Dreieck 4:						

Lösung:

	a	b	c	a^2	b^2	c^2
Dreieck 1:	3	4	5	9	16	**25**
Dreieck 2:	6	8	10	36	64	**100**
Dreieck 3:	4,8	5,5	7,3	23,04	30,25	**53,29**
Dreieck 4:	7	2,4	7,4	49	5,76	**54,76**

Die Summe aus a^2 und b^2 ergibt jeweils den Wert von c^2.

Dreieck 1: 9 + 16 = **25** Dreieck 2: 36 + 64 = **100**

Dreieck 3: 23,04 + 30,25 = **53,29** Dreieck 4: 49 + 5,76 = **54,76**

Zusatzaufgabe:
Zeichne weitere rechtwinklige Dreiecke und überprüfe die Formel $a^2 + b^2 = c^2$.

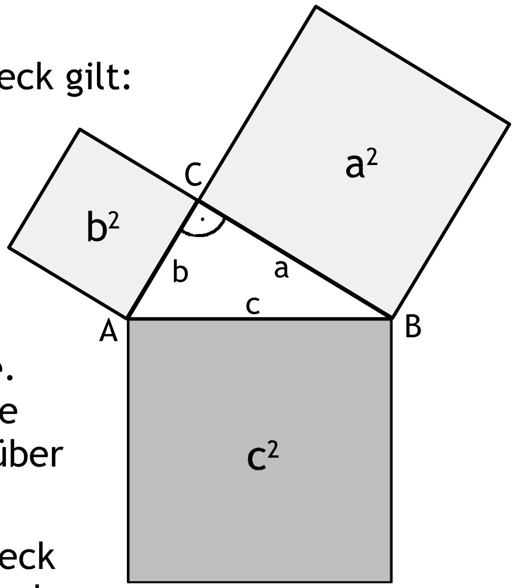
Merke: **Der Satz des Pythagoras**

In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt:

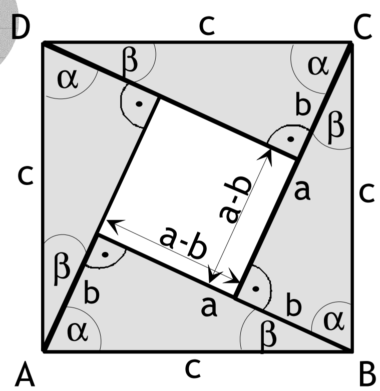
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Darin sind a und b die Seiten, die den rechten Winkel aufspannen. Sie werden **Katheten** genannt.
Die Seite c heißt **Hypotenuse**. Sie ist immer die längste Seite des Dreiecks und liegt gegenüber dem rechten Winkel.

Gilt umgekehrt in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig.



Beweis:



❶ Setzt man vier rechtwinklige, kongruente Dreiecke wie abgebildet zusammen, erhält man ein Viereck ABCD. Da die vier Seiten von ABCD gleich lang sind (= c) und die Winkel jeweils $\alpha + \beta = 90^\circ$ sind, ist ABCD ein Quadrat.

❷ Auch die eingeschlossene (weiße) Fläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge (a – b) und dem Flächeninhalt:

$$\mathbf{A_W = (a - b)^2 \qquad (I)}$$

❸ Den Flächeninhalt A_W des weißen Quadrats kann man aber auch berechnen, indem man vom Flächeninhalt $A_{ABCD} = c^2$ den Flächeninhalt der 4 Dreiecke abzieht.

Für den Flächeninhalt eines der rechtwinkligen Dreiecke gilt: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Somit gilt:
$$A_W = c^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$
$$\mathbf{A_W = c^2 - 2ab \qquad (II)}$$

❹ Aus Gleichung (I) und (II) folgt:

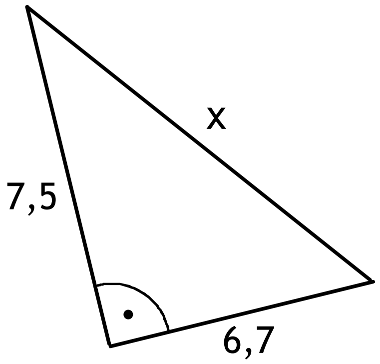
$$(a - b)^2 = c^2 - 2ab$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2ab \quad | +2ab$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

Was zu beweisen war.

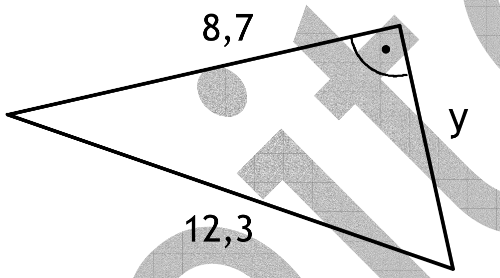
Übung:

Berechne mit dem Satz des Pythagoras die fehlende Seitenlänge in den rechtwinkligen Dreiecken.

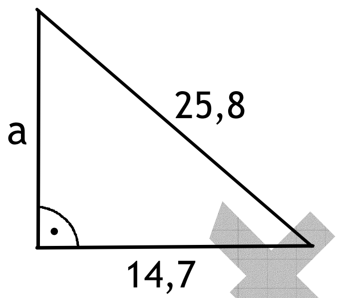
Dreieck 1:



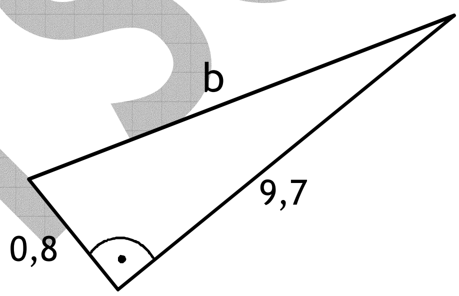
Dreieck 2:



Dreieck 3:



Dreieck 4:



Lösung:

In **Dreieck 1** ist x die Hypotenuse.
Also gilt:

$$7{,}5^2 + 6{,}7^2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 101{,}14 = x^2 \quad | \ \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow \quad 10{,}06 = x \ \text{ bzw. } \ \mathbf{x = 10{,}06}$$

In **Dreieck 2** ist y eine Kathete.
Also gilt:

$$y^2 + 8{,}7^2 = 12{,}3^2 \quad | \ -8{,}7^2$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 75{,}6 \quad | \ \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{y = 8{,}69}$$

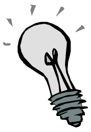
In **Dreieck 3** ist a eine Kathete.
Also gilt:

$$a^2 + 14{,}7^2 = 25{,}8^2 \quad | \ -14{,}7^2$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 = 449{,}55 \quad | \ \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{a = 21{,}20}$$

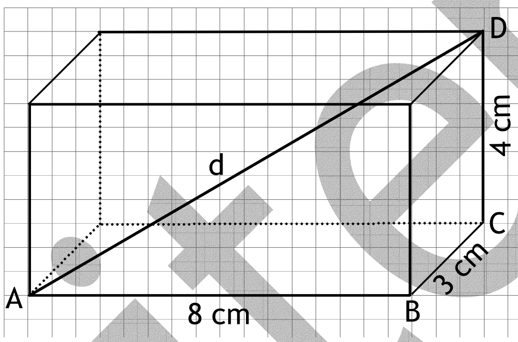
In **Dreieck 4** ist b die Hypotenuse.
Also gilt:

$$0{,}8^2 + 9{,}7^2 = b^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 94{,}73 = b^2 \quad | \ \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow \quad 9{,}73 = b \ \text{ bzw. } \ \mathbf{b = 9{,}73}$$

2. Pythagoras im Raum



Beispiel 1:

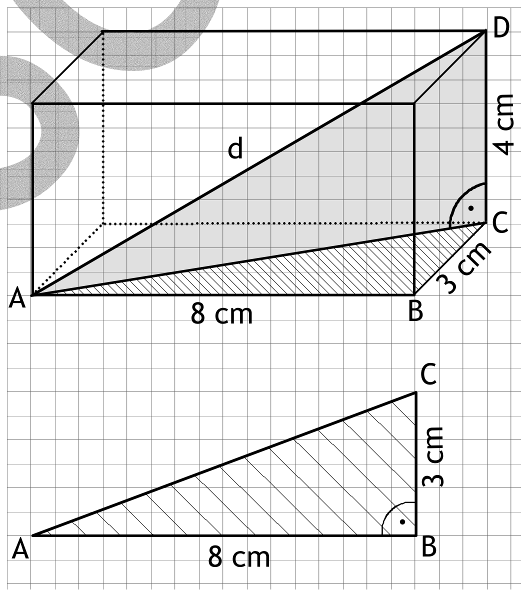


a) Übertrage die Abbildung ins Heft und berechne mit den eingezeichneten Kantenlängen die Raumdiagonale $d = \overline{AD}$ des Quaders.

Hinweis: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein und überlege dir, wo rechtwinklige Dreiecke vorkommen.

b) Überlege dir eine Formel, mit der man die Raumdiagonale eines Quaders in Abhängigkeit von den Kanten a, b und c bestimmen kann.
Was ergibt sich für die Raumdiagonale eines Würfels?

Lösung:



a) Man muss zunächst die Diagonale AC der Grundfläche einzeichnen. Dadurch entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ACD und ABC.

Die Diagonale d ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ACD. Darin lautet der Satz des Pythagoras: $d^2 = \overline{AC}^2 + (4\,cm)^2$

$\Leftrightarrow \quad d^2 = \overline{AC}^2 + 16\,cm^2$

Die Strecke $\overline{AC}$ kann man mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen ABC berechnen.

Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AC}^2 = (8\,cm)^2 + (3\,cm)^2$

Einsetzen in $d^2 = \overline{AC}^2 + 16\,cm^2$ ergibt:

$d^2 = (8\,cm)^2 + (3\,cm)^2 + 16\,cm^2$

$\Leftrightarrow \quad d^2 = 89\,cm^2 \quad | \sqrt{}$

$\Rightarrow \quad$ **d = 9,43 cm**

b) Mit den allgemeinen Kanten a, b und c erhält man:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad | \sqrt{}$

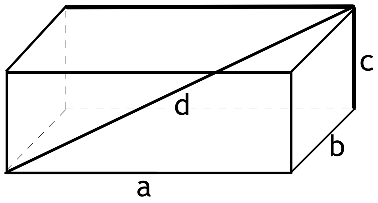
$\Rightarrow \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

In einem Würfel ist a = b = c. Damit folgt:

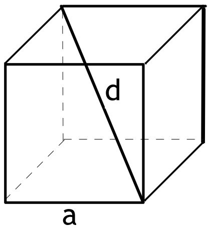
$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

Merke:

Für die **Raumdiagonale d eines Quaders** mit den Kantenlängen a, b und c gilt: $\mathbf{d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

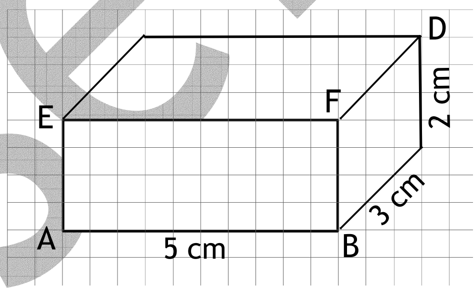


Für die **Raumdiagonale d eines Würfels** mit der Kantenlänge a gilt: $\mathbf{d = a\sqrt{3}}$



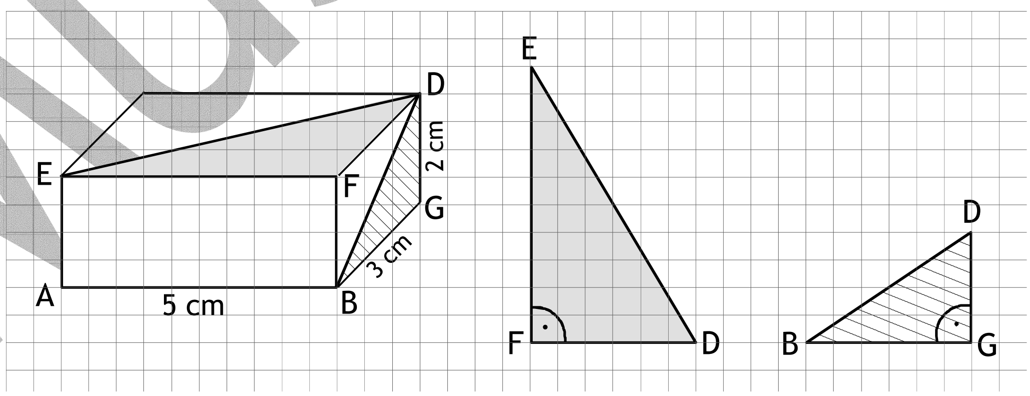
Übung 1:

Übertrage den Quader ins Heft und berechne die Längen der Strecken AD, DE und BD.

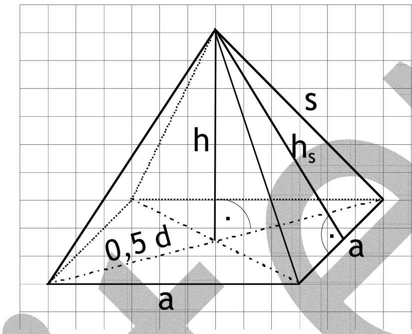


Lösung:

- Die Strecke AD ist die Diagonale des Quaders. Mit der Formel $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ erhält man: $d = \overline{AD} = \sqrt{25\text{ cm}^2+9\text{ cm}^2+4\text{ cm}^2} \approx \mathbf{6{,}16\text{ cm}}$
- Die Strecke DE kann im rechtwinkligen Dreieck EFD berechnet werden. Es gilt: $\overline{DE}^2 = (3\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 = 34\text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{DE} = \sqrt{34\text{ cm}^2} \approx \mathbf{5{,}8\text{ cm}}$
- Die Strecke BD kann im rechtwinkligen Dreieck BGD berechnet werden. Es gilt: $\overline{BD}^2 = (3\text{ cm})^2 + (2\text{ cm})^2 = 13\text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{13\text{ cm}^2} \approx \mathbf{3{,}6\text{ cm}}$



Beispiel 2:



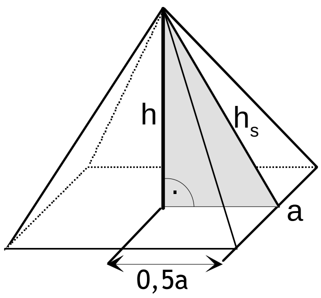
Übertrage das Schrägbild der quadratischen Pyramide ins Heft und markiere die darin vorkommenden rechtwinkligen Dreiecke.

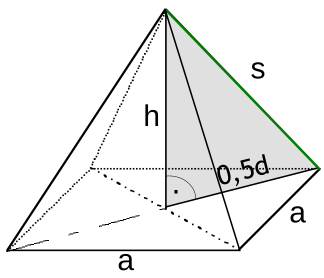
a = Grundkante; s = Seitenkante; h = Pyramidenhöhe;

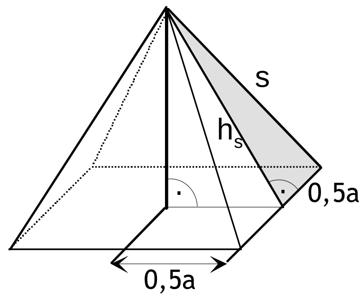
h_s = Seitenhöhe; d = Diagonale der quadrat. Grundfläche

Wie lautet jeweils der Satz des Pythagoras in diesen Dreiecken ?

Lösung:

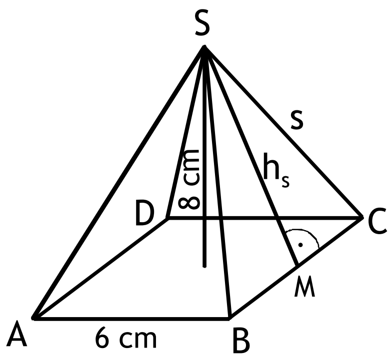






$h_s^2 = (0{,}5a)^2 + h^2$ $s^2 = (0{,}5d)^2 + h^2$ $s^2 = (0{,}5a)^2 + h_s^2$

Übung 2:



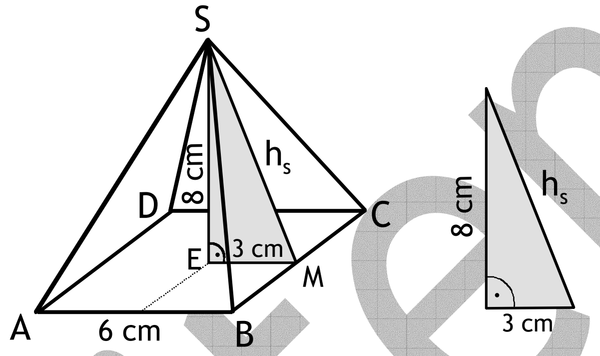
Die Höhe einer quadratischen Pyramide beträgt 8 cm, die Kantenlänge der Grundfläche ist 6 cm.

a) Berechne die Höhe h_s des Seitendreiecks BCS.

b) Wie lang ist die Seitenkante s ?

Lösung:

a)



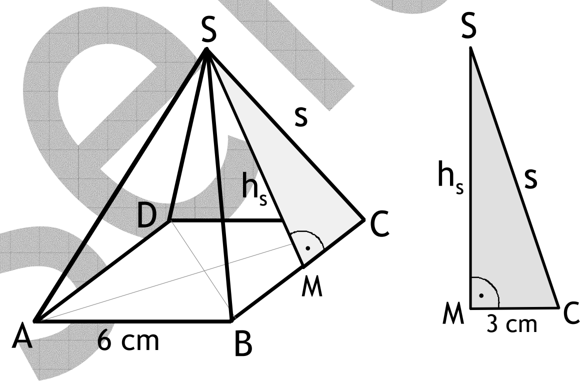
Mit der Hilfslinie EM entsteht das graue rechtwinklige Dreieck MSE.
Darin lautet der Satz des Pythagoras:

$$(8\,\text{cm})^2 + (3\,\text{cm})^2 = h_s^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 73\,\text{cm}^2 = h_s^2 \qquad |\ \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad 8{,}54\ \text{cm} = h_s \ \text{ bzw. } \ \mathbf{h_s = 8{,}54\ cm}$$

b)



Die Länge der Kante s kann im rechtwinkligen Dreieck MCS berechnet werden.
Darin lautet der Satz des Pythagoras:

$$h_s^2 + (3\,\text{cm})^2 = s^2$$

Und mit $h_s = 8{,}54$ cm:

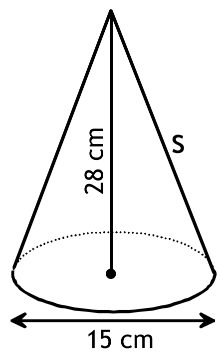
$$\Leftrightarrow \quad (8{,}54\,\text{cm})^2 + (3\,\text{cm})^2 = s^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 81{,}93\,\text{cm}^2 = s \qquad |\ \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad 9{,}05\ \text{cm} = s$$

bzw. **s = 9,05 cm**

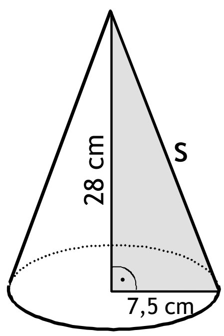
Übung 3:



Berechne die Seitenlänge s des Kegels.

Trage zunächst eine Hilfslinie ein, sodass ein rechtwinkliges Dreieck entsteht.

Lösung:



Mit dem Radius r = 7,5 cm erhält man das graue Dreieck. Darin lautet der Satz des Pythagoras:

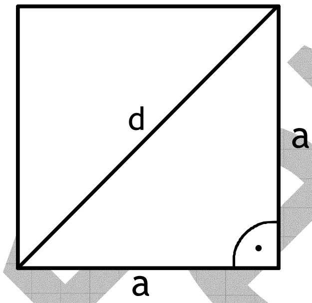
$$(7{,}5\,\text{cm})^2 + (28\,\text{cm})^2 = s^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 840{,}25\,\text{cm}^2 = s^2 \qquad |\ \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad 28{,}99\ \text{cm} = s \ \text{ bzw. } \ \mathbf{s = 28{,}99\ cm}$$

3. Aufstellen von Formeln

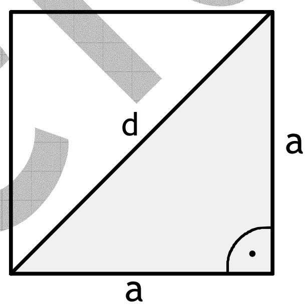
Beispiel 1:



Drücke die Diagonale d eines Quadrats durch dessen Seitenlänge a aus.

Lösung:

Die Diagonale d und die Seiten a des Quadrats bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Darin lautet der Satz des Pythagoras:



$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2 = 2a^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad d = \sqrt{2a^2} \quad | \text{ teilweise Wurzel ziehen}$$

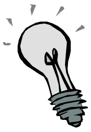
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{d = a\sqrt{2}}$$

Merke:

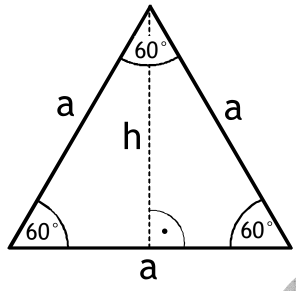
Für die **Diagonale d eines Quadrats** mit der Seitenlänge a gilt: $\mathbf{d = a\sqrt{2}}$

Umgekehrt kann man aus der Diagonalen d eines Quadrats die Seitenlänge a berechnen.

Es gilt: $\mathbf{a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}}$



Beispiel 2:

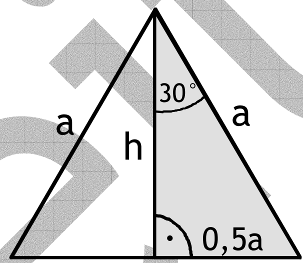


a) Drücke die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit von der Seitenlänge a aus.

b) Stelle eine Formel für den Flächeninhalt A gleichseitiger Dreiecke auf.

Lösung:

a) Die Höhe h teilt das gleichseitige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.



Im grauen Dreieck lautet der Satz des Pythagoras:

$$\mathbf{(0{,}5a)^2 + h^2 = a^2}$$

Durch Umformen erhält man:

$$0{,}25a^2 + h^2 = a^2 \quad | -0{,}25a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 0{,}75a^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad h = a\sqrt{0{,}75}$$

Mit $\sqrt{0{,}75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ erhält man: $\mathbf{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$

b) Für den Flächeninhalt jedes Dreiecks gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

(mit der Grundseite g und der Höhe h)

Im gleichseitigen Dreieck ist g = a und $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Damit folgt für den Flächeninhalt A:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}}$$

Merke:

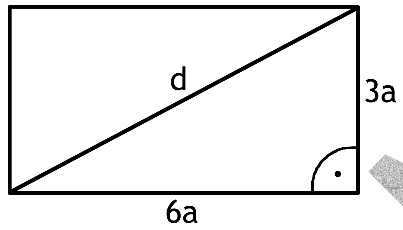
Für die **Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks** mit der Seitenlänge a gilt: $\mathbf{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$

Für den **Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks** mit der Seitenlänge a gilt: $\mathbf{A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}}$

Übung 1:

Drücke die Diagonale d des Rechtecks in Abhängigkeit von a aus.

Hinweis: Achte beim Einsetzen in den Satz des Pythagoras auf die Klammersetzung !



Lösung:

Im grauen Dreieck lautet der Satz des Pythagoras:

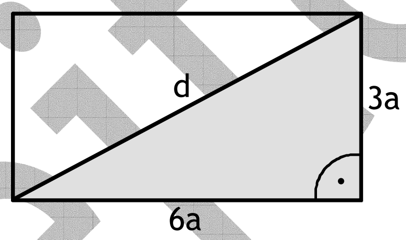
$$d^2 = (6a)^2 + (3a)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2 = 36a^2 + 9a^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad d = \sqrt{45a^2} \quad | \text{ teilweise Wurzel ziehen}$$

$$\Leftrightarrow \quad d = a\sqrt{45} \quad | \text{ teilweise Wurzel ziehen}$$

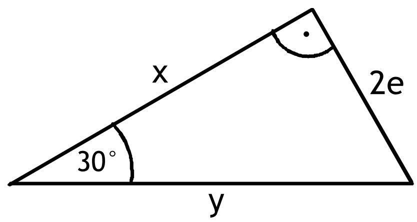
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{d} = a\sqrt{9 \cdot 5} = \mathbf{3a\sqrt{5}}$$



Übung 2:

Drücke die Seiten x und y in Abhängigkeit von e aus.

Tipp: Ergänze das Dreieck zu einem gleichseitigen Dreieck.



Lösung:

Wenn man das Dreieck an der Seite x spiegelt, entsteht das gleichseitige Dreieck ABC.
Die Strecke y ist also y = 4e.

Im grauen Dreieck folgt mit dem Satz des Pythagoras:

$$(4e)^2 = (2e)^2 + x^2$$

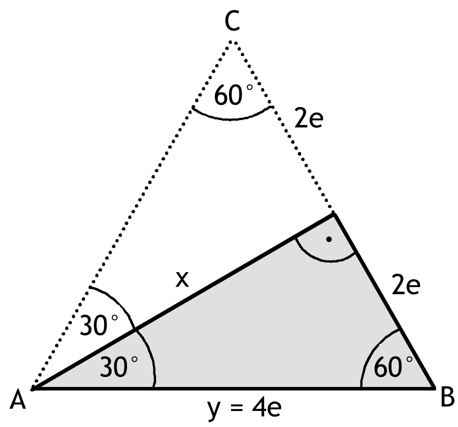
$$\Leftrightarrow \quad 16e^2 = 4e^2 + x^2 \quad | -4e^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 12e^2 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$$

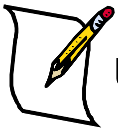
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{12e^2} = x \quad | \text{ teilweise Wurzel ziehen}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = e\sqrt{4 \cdot 3} \quad | \text{ teilweise Wurzel ziehen}$$

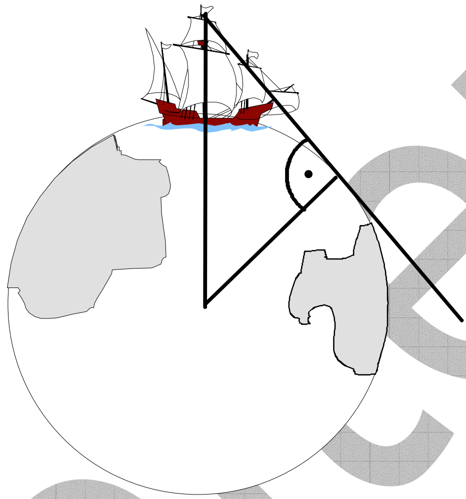
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 2e\sqrt{3}}$$



4. Praktische Anwendungen



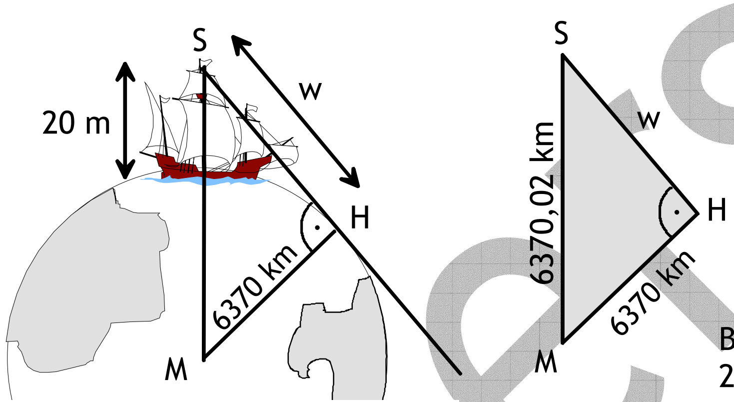
Übung 1:



Wie weit kann man von einem 20 m hohen Mast eines Schiffes über das Meer sehen ?

Der Erdradius beträgt ca. 6370 km.

Lösung:



Beachte:
20 m = 0,02 km

Die Sichtweite w wird durch die Erdkrümmung begrenzt. Der Punkt H, wo die Sichtweite am Horizont endet, der Erdmittelpunkt M und die Mastspitze S bilden das rechtwinklige Dreieck MHS. Darin gilt der Satz des Pythagoras:

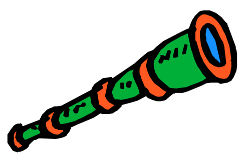
$$w^2 + (6370\text{ km})^2 = (6370{,}02\text{ km})^2 \quad | -(6370\text{ km})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad w^2 = (6370{,}02\text{ km})^2 - (6370\text{ km})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad w^2 = 254{,}8\text{ km}^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{w = 15{,}96\text{ km}}$$

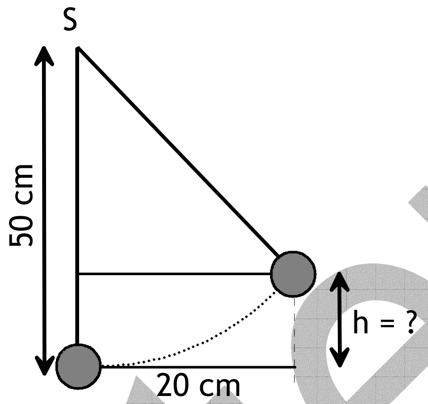
Antwort: Von dem 20 m hohen Mast aus kann man ca. 16 km weit über das Meer sehen.



Übung 2:

Mit dem Satz des Pythagoras kann man bei einem schwingenden Pendel die Höhe berechnen, um die es ausschwingt.

Wie groß ist h, wenn die Pendellänge 50 cm ist und der Ausschlag nach rechts 20 cm beträgt ?



Lösung:

Im Dreieck ABC gilt der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + (20\text{ cm})^2 = (50\text{ cm})^2$$

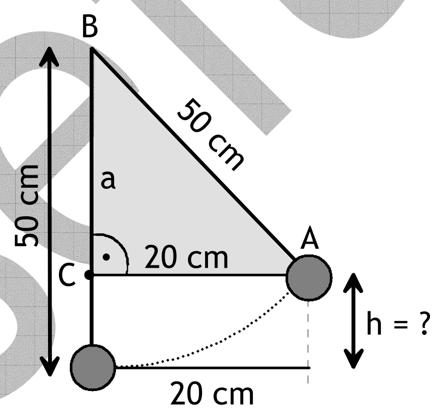
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 400\text{ cm}^2 = 2500\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = 2100\text{ cm}^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a = 45{,}8\text{ cm}}$$

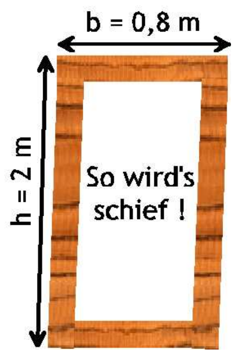
Damit folgt: $h = 50\text{ cm} - 45{,}8\text{ cm} = 4{,}2\text{ cm}$

Antwort: Die Höhe des Pendelausschlags beträgt 4,2cm.



Übung 3:

Überlege dir, wie man den Satz des Pythagoras ausnutzen kann, um die Bretter eines Regals oder eines Schranks möglichst senkrecht zusammenzufügen.



Lösung:

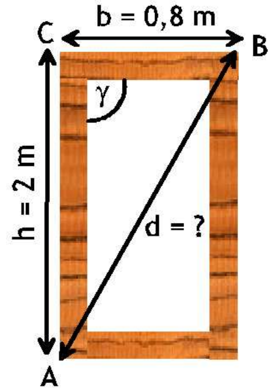
Man muss die Länge der Diagonalen so wählen, dass $d^2 = h^2 + b^2$ ist. Weil dann im Dreieck ABC der Satz des Pythagoras gilt, muss es rechtwinklig sein.

$$d^2 = (2\text{ m})^2 + (0{,}8\text{ m})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2 = 4{,}64\text{ m}^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{d = 2{,}15\text{ m}}$$

Antwort: Man muss die Schrankbretter so aneinander fixieren, dass die Diagonale 2,15 m lang ist.

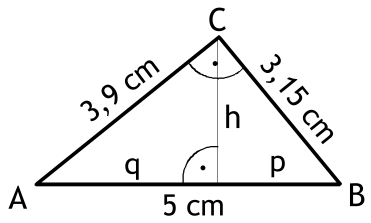


5. Der Kathetensatz

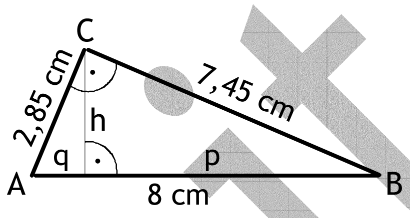
Beispiel:

Übertrage folgende Dreiecke ins Heft und zeichne jeweils die Höhe h zur Grundseite AB ein.

Dreieck 1:



Dreieck 2:



Ergänze dann die folgende Tabelle:

	c	q	p	a^2	b^2
Dreieck 1:	5 cm				
Dreieck 2:	8 cm				

Welcher Zusammenhang fällt auf, wenn man die Werte für a^2 und b^2 mit den Produkten $c \cdot p$ und $c \cdot q$ vergleicht ?

Lösung:

	c	q	p	a^2	b^2
Dreieck 1:	5 cm	**3 cm**	**2 cm**	**9,92 cm²**	**15,21 cm²**
Dreieck 2:	8 cm	**1 cm**	**7 cm**	**55,5 cm²**	**8,12 cm²**

Vermutung: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$

In **Dreieck 1** ist: $9{,}92\ \text{cm}^2 \approx 5\text{cm} \cdot 2\text{cm}$ und $15{,}21\ \text{cm}^2 \approx 5\text{cm} \cdot 3\text{cm}$

In **Dreieck 2** ist: $55{,}5\ \text{cm}^2 \approx 8\text{cm} \cdot 7\text{cm}$ und $8{,}12\ \text{cm}^2 \approx 8\text{cm} \cdot 1\text{cm}$

Zusatzaufgabe: Überprüfe die Vermutung an weiteren rechtwinkligen Dreiecken.

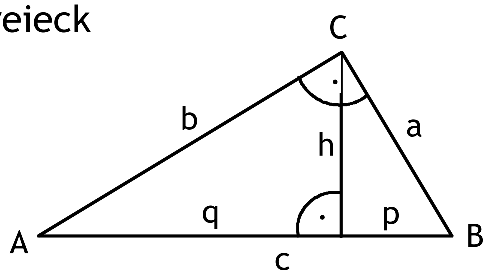
Merke:

Der Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ gilt:

$\mathbf{a^2 = c \cdot p}$ und $\mathbf{b^2 = c \cdot q}$

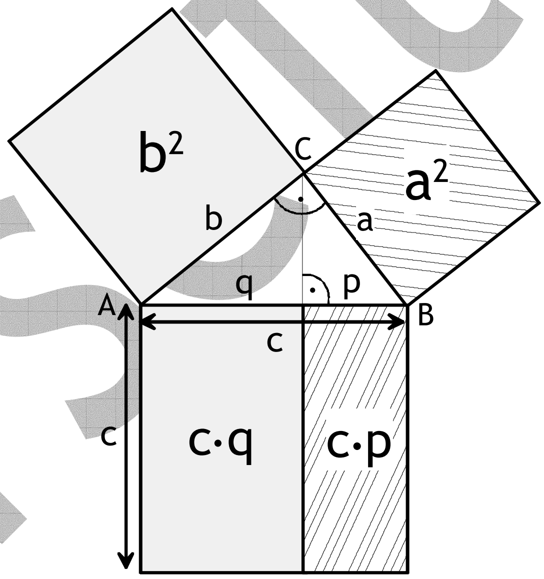
q und p nennt man die Hypotenusenabschnitte.



Grafische Veranschaulichung des Kathetensatzes:

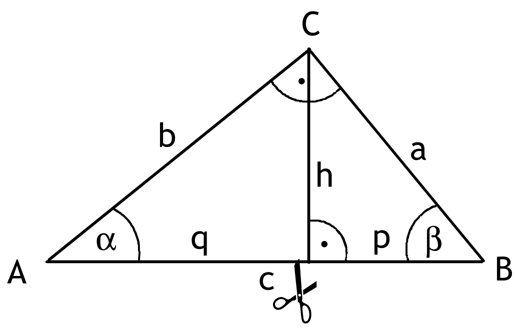
Das Rechteck mit den Seiten c und q hat den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat mit der Seite b.

Das Rechteck mit den Seiten c und p hat den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat mit der Seite a.



Beweis:

Wenn man ein rechtwinkliges Dreieck entlang der Höhe durchschneidet, erhält man zwei Dreiecke, die ähnlich zu dem ursprünglichen (großen) Dreieck sind. Das heißt, diese beiden Dreiecke sind jeweils eine Verkleinerung des ursprünglichen Dreiecks.



Teste selbst: Zeichne zweimal das gleiche rechtwinklige Dreieck und schneide eines davon entlang der Höhe durch. Drehe dann beide Teildreiecke um und vergleiche mit dem ganzen Dreieck. Ergänze nun mithilfe der ähnlichen Dreiecke folgende Lücken:

(I) $\frac{b}{c} = \frac{\quad}{\quad}$ und (II) $\frac{a}{c} = \frac{\quad}{\quad}$

Wie ergeben sich daraus die Gleichungen des Kathetensatzes ?

Weil die Dreiecke ABC, ACD und BDC ähnlich zueinander sind, sind auch die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich.

Vergleich von Dreieck ABC mit Dreieck ACD:

(I) $\frac{b}{c} = \frac{q}{b} \quad | \cdot b \cdot c$

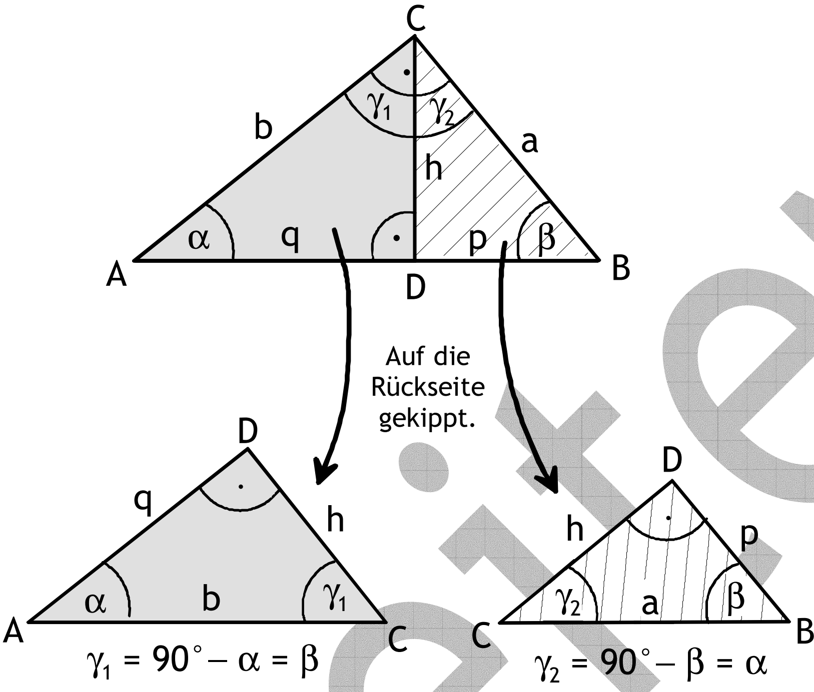
$\Leftrightarrow \quad \mathbf{b^2 = c \cdot q}$

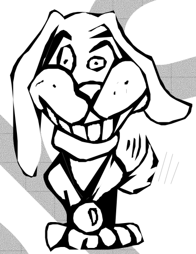
Vergleich von Dreieck ABC mit Dreieck BDC:

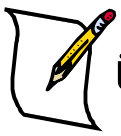
(II) $\frac{a}{c} = \frac{p}{a} \quad | \cdot a \cdot c$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{a^2 = c \cdot p}$

Was zu beweisen war.

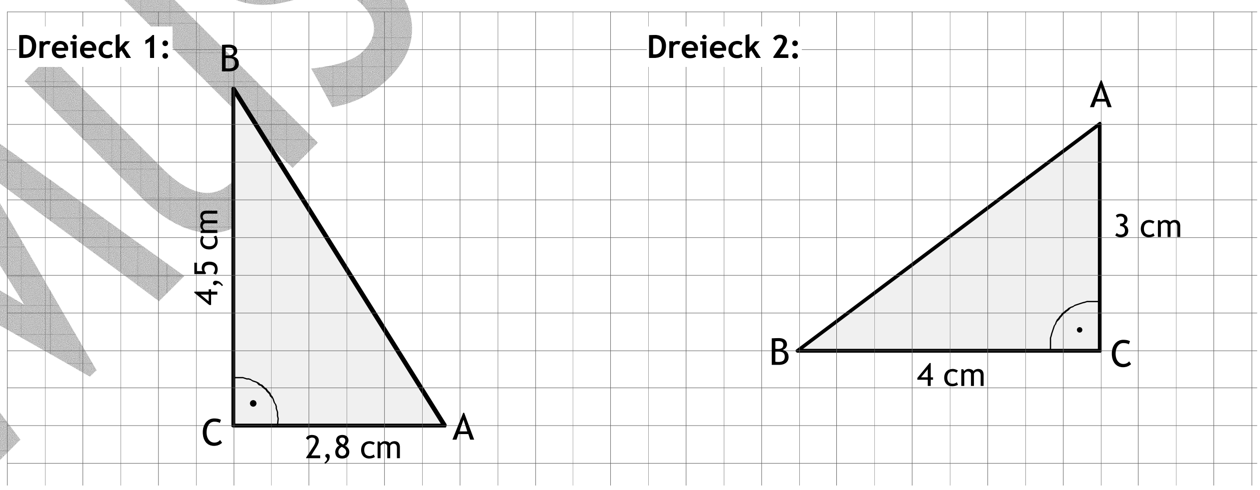






Übung 1:

Übertrage folgende Dreiecke ins Heft, zeichne die Höhe h zur Grundseite AB ein und überprüfe durch Nachmessen den Kathetensatz.

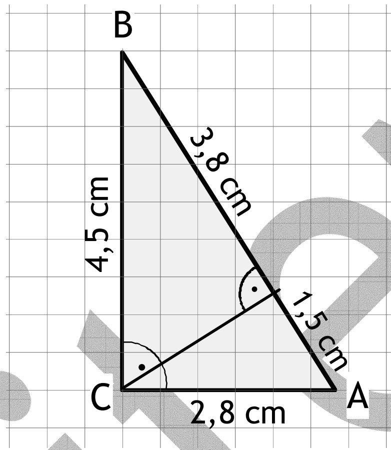


Zusatzaufgabe:

Zeichne weitere rechtwinklige Dreiecke und überprüfe den Kathetensatz.

Lösung:

Dreieck 1:



Es ist: $q = 1{,}5$ cm ; $p = 3{,}8$ cm;

$c = 5{,}3$ cm; $a = 4{,}5$ cm; $b = 2{,}8$ cm

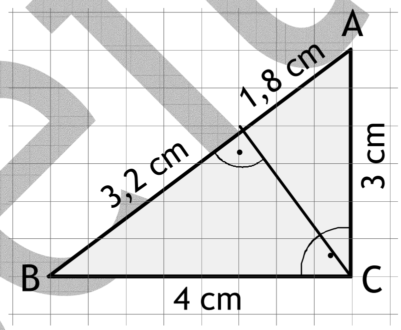
Einsetzen in $a^2 = c \cdot p$ ergibt:

$(4{,}5\text{ cm})^2 \approx 5{,}3\text{cm} \cdot 3{,}8\text{cm} \Leftrightarrow 20{,}25\text{ cm}^2 \approx 20{,}14\text{cm}^2$

Einsetzen in $b^2 = c \cdot q$ ergibt:

$(2{,}8\text{ cm})^2 \approx 5{,}3\text{cm} \cdot 1{,}5\text{cm} \Leftrightarrow 7{,}84\text{ cm}^2 \approx 7{,}95\text{cm}^2$

Dreieck 2:



Es ist: $q = 1{,}8$ cm ; $p = 3{,}2$ cm;

$c = 5$ cm; $a = 4$ cm; $b = 3$ cm

Einsetzen in $a^2 = c \cdot p$ ergibt:

$(4\text{ cm})^2 = 5\text{cm} \cdot 3{,}2\text{cm} \Leftrightarrow 16\text{ cm}^2 = 16\text{cm}^2$

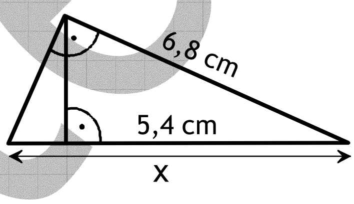
Einsetzen in $b^2 = c \cdot q$ ergibt:

$(3\text{ cm})^2 = 5\text{cm} \cdot 1{,}8\text{cm} \Leftrightarrow 9\text{ cm}^2 = 9\text{cm}^2$

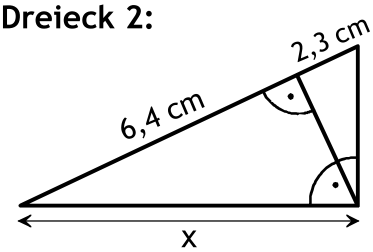
Übung 2:

Berechne die Strecke x mithilfe des Kathetensatzes.

Dreieck 1:



Dreieck 2:



Lösung:

In Dreieck 1 lautet der Kathetensatz:

$6{,}8^{\,2} = 5{,}4 \cdot x$

$\Leftrightarrow\ 46{,}24 = 5{,}4x \quad |\ : 5{,}4$

$\Leftrightarrow\ 8{,}56 = x$ bzw. $\mathbf{x = 8{,}56}$ **cm**

In Dreieck 2 ist die Hypotenuse $c = 6{,}4\text{ cm} + 2{,}3\text{ cm} = 8{,}7\text{ cm}$.

Damit lautet der Kathetensatz:

$x^2 = 6{,}4 \cdot 8{,}7$

$\Leftrightarrow\ x^2 = 55{,}68 \quad |\ \sqrt{\ }$

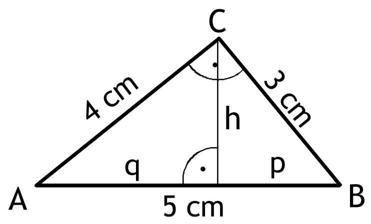
$\Rightarrow\ \mathbf{x = 7{,}46}$ **cm**

6. Der Höhensatz

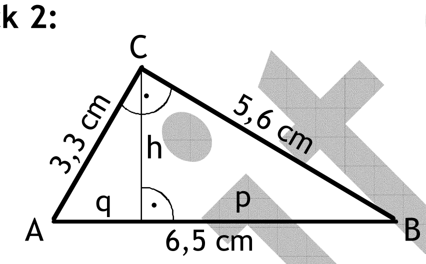
Beispiel:

Übertrage folgende Dreiecke ins Heft und zeichne jeweils die Höhe h zur Grundseite AB ein.

Dreieck 1:



Dreieck 2:



Ergänze dann die folgende Tabelle.

	q	p	h	h^2
Dreieck 1:				
Dreieck 2:				

Welcher Zusammenhang fällt auf, wenn man die Werte für h^2 mit dem Produkt $q \cdot p$ vergleicht?

Lösung:

	q	p	h	h^2
Dreieck 1:	**3,2 cm**	**1,8 cm**	**2,4 cm**	**5,76 cm**
Dreieck 2:	**1,7 cm**	**4,8 cm**	**2,85 cm**	**8,12 cm**

Vermutung: $\mathbf{h^2 = q \cdot p}$

In **Dreieck 1** ist: $5{,}76\,cm^2 = 3{,}2cm \cdot 1{,}8cm$

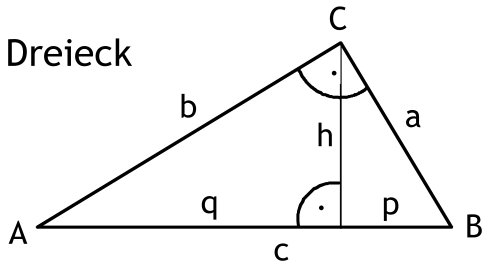
In **Dreieck 2** ist: $8{,}12\,cm^2 \approx 1{,}7cm \cdot 4{,}8cm$

Merke:

Der Höhensatz

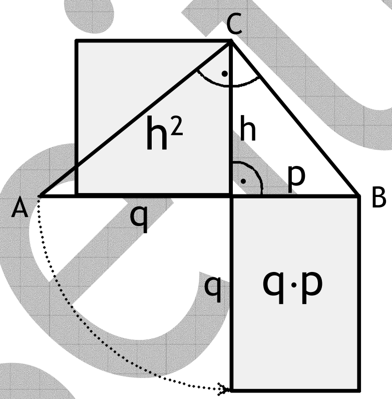
In einem rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ gilt:

$$h^2 = q \cdot p$$



Grafische Veranschaulichung des Höhensatzes:

In einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe h den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten p und q.



Beweis:

Der Höhensatz kann wie der Kathetensatz mithilfe ähnlicher Dreiecke bewiesen werden. Weil die Dreiecke ABC, ACD und BDC ähnlich zueinander sind, sind auch die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich.

Vergleich von Dreieck ABC mit Dreieck ACD:

(I) $\frac{a}{b} = \frac{h}{q}$

Vergleich von Dreieck ABC mit Dreieck BDC:

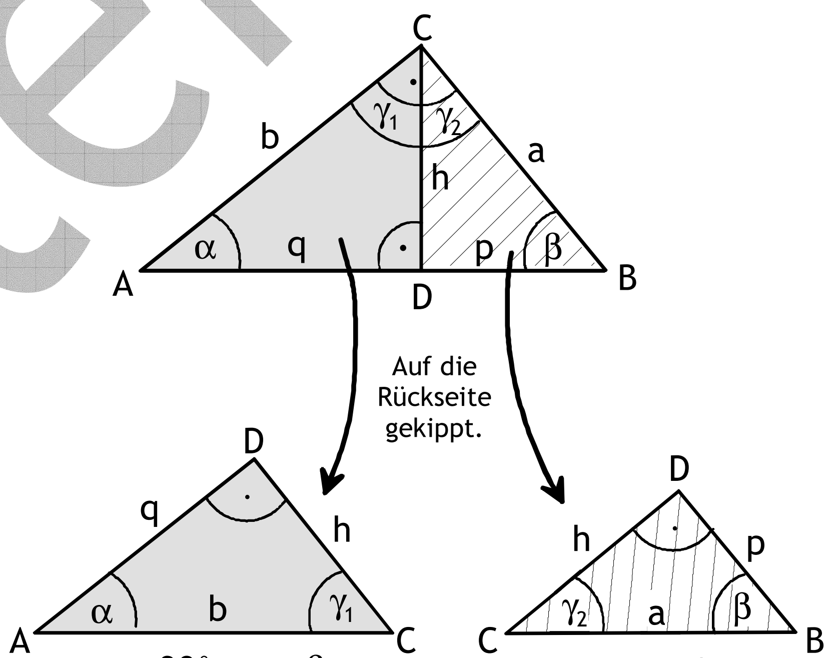
(II) $\frac{a}{b} = \frac{p}{h}$

Gleichsetzen von (I) und (II) ergibt:

$$\frac{h}{q} = \frac{p}{h} \quad | \cdot q \cdot h$$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 = q \cdot p$$

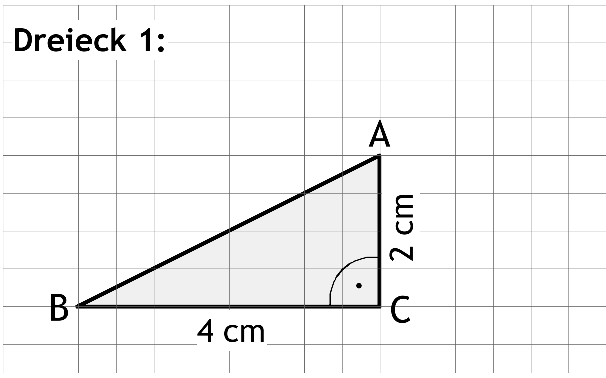
Was zu beweisen war.

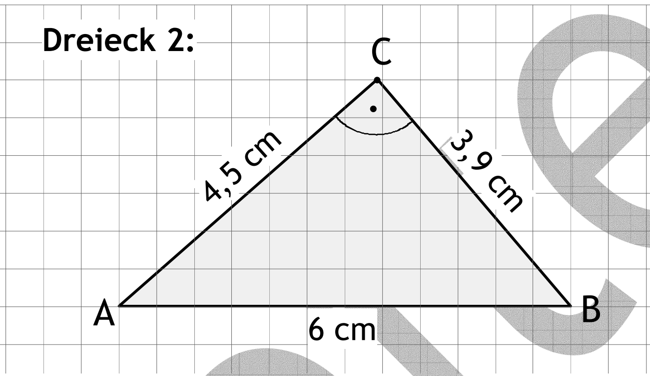


$\gamma_1 = 90^\circ - \alpha = \beta$ $\gamma_2 = 90^\circ - \beta = \alpha$

Übung 1:

Übertrage folgende Dreiecke ins Heft, zeichne die Höhe h zur Grundseite AB ein und überprüfe durch Nachmessen den Höhensatz.



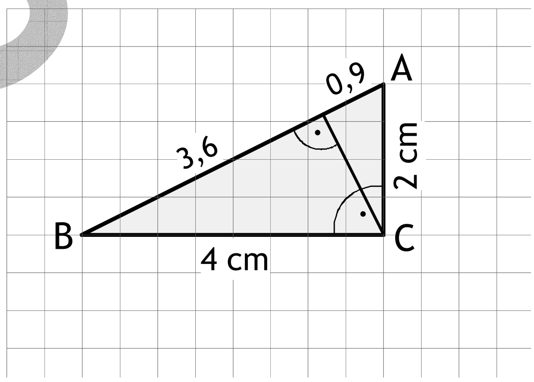


Zusatzaufgabe:

Zeichne weitere rechtwinklige Dreiecke und überprüfe den Höhensatz.

Lösung:

Dreieck 1:



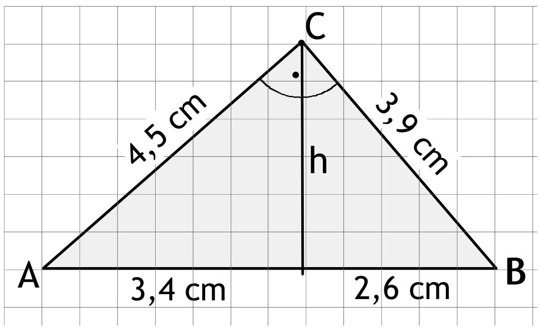
Es ist: $q = 0{,}9$ cm ; $p = 3{,}6$ cm und $h = 1{,}8$ cm

Einsetzen in $h^2 = q \cdot p$ ergibt:

$(1{,}8\,\text{cm})^2 = 0{,}9\,\text{cm} \cdot 3{,}6\,\text{cm}$

$\Leftrightarrow \; 3{,}24\,\text{cm}^2 = 3{,}24\,\text{cm}^2$

Dreieck 2:



Es ist: $q = 3{,}4$ cm ; $p = 2{,}6$ cm und $h \approx 2{,}95$ cm

Einsetzen in $h^2 = q \cdot p$ ergibt:

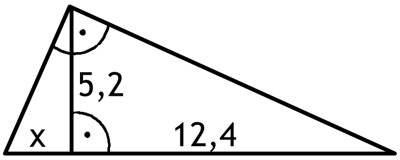
$(2{,}95\,\text{cm})^2 \approx 3{,}4\,\text{cm} \cdot 2{,}6\,\text{cm}$

$\Leftrightarrow \; 8{,}70\,\text{cm}^2 \approx 8{,}84\,\text{cm}^2$

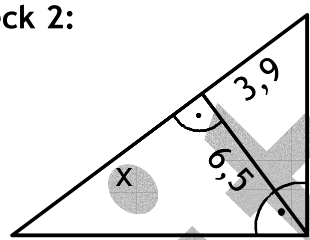
Übung 2:

Berechne x bzw. h mithilfe des Höhensatzes.
Beachte: In Dreieck 4 wird sowohl der Kathetensatz als auch der Höhensatz benötigt.

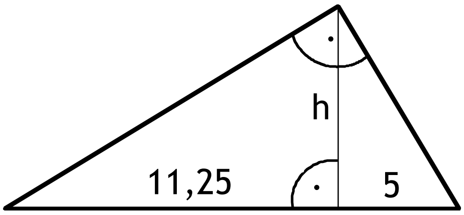
Dreieck 1:



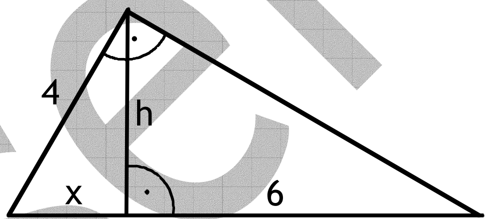
Dreieck 2:



Dreieck 3:



Dreieck 4:



Lösung:

In **Dreieck 1** lautet der Höhensatz:

$5{,}2^{\,2} = 12{,}4 \cdot x$

$\Leftrightarrow\ 27{,}04 = 12{,}4x \quad |\ : 12{,}4$

$\Leftrightarrow\ 2{,}18 = x$ bzw. $\mathbf{x = 2{,}18}$

In **Dreieck 2** lautet der Höhensatz:

$6{,}5^{\,2} = 3{,}9 \cdot x$

$\Leftrightarrow\ 42{,}25 = 3{,}9x \quad |\ : 3{,}9$

$\Leftrightarrow\ 10{,}83 = x$ bzw. $\mathbf{x = 10{,}83}$

In **Dreieck 3** lautet der Höhensatz:

$h^2 = 11{,}25 \cdot 5$

$\Leftrightarrow\ h^2 = 56{,}25 \quad |\ \sqrt{\ }$

$\Rightarrow\ \mathbf{h = 7{,}5}$

In **Dreieck 4** muss man zuerst x mithilfe des Kathetensatzes berechnen:

$4^2 = x\,(x + 6)$

$\Leftrightarrow\ 0 = x^2 + 6x - 16$

$\Rightarrow\ x_1 = 2$ und $x_2 = -8$

Da nur positive Werte in Frage kommen, ist **x = 2** die Lösung.

Mit dem Höhensatz erhält man nun:

$h^2 = 2 \cdot 6$

$\Leftrightarrow\ h^2 = 12 \quad |\ \sqrt{\ }$

$\Rightarrow\ \mathbf{h = 3{,}46}$

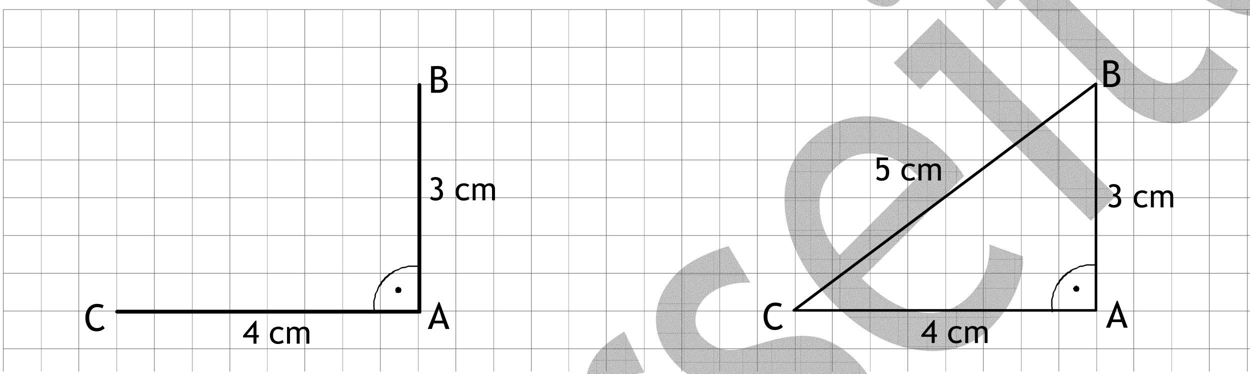
7. Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke

Beispiel:

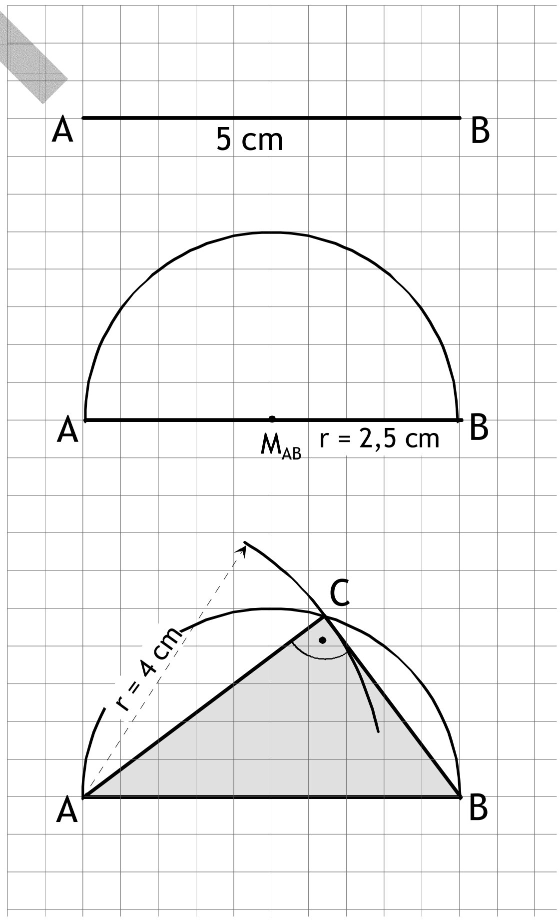
Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a = 3 cm, b = 4 cm und c = 5 cm.

Lösung:

Variante 1: Das Dreieck steht auf einer der beiden Katheten.



Variante 2: Das Dreieck soll auf der Hypotenuse liegen.



① Zeichne zuerst die Hypotenuse.

② Zeichne dann einen Halbkreis über der Hypotenuse mit r = 0,5c = 2,5 cm.

③ Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius r = b = 4 cm.
Dort, wo dieser Kreisbogen den Halbkreis schneidet, ist der Punkt C.

Nach dem **Satz des Thales** muss der Winkel γ immer 90° betragen.

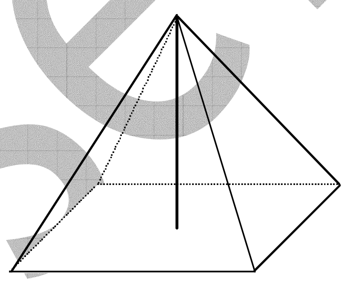
1) Wie lautet der Satz des Pythagoras ? Gib die Formel an und die Bedeutung der Variablen darin.

2) Woran erkennt man in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse und woran die beiden Katheten ?

3) Wie berechnet man in einem rechtwinkligen Dreieck mit dem Satz des Pythagoras eine fehlende Seite, wenn zwei Seiten bekannt sind ?

4) Wie kann man mit dem Satz des Pythagoras die Raumdiagonale eines Quaders berechnen, wenn man alle Kantenlängen des Quaders kennt ?

5) Markiere in der quadratischen Pyramide drei rechtwinklige Dreiecke. Zeichne fehlende Linien ein.



6) Mit welcher Formel kann man die Diagonale d eines Quadrats aus der Seitenlänge a berechnen ?

7) Mit welcher Formel kann man die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit von der Seitenlänge a berechnen ?

8) Nenne eine praktische Anwendung, bei der der Satz des Pythagoras eine Rolle spielt.

9) Was sind die Hypotenusenabschnitte p und q in einem rechtwinkligen Dreieck ?

10) Wie lautet der Kathetensatz ? Was bedeuten die Variablen darin ?

11) Wie lautet der Höhensatz ? Was bedeuten die Variablen darin ?

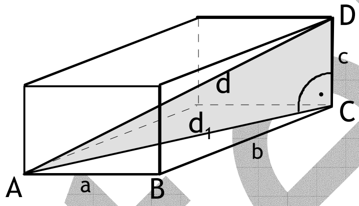
Antworten zur Checkliste:

1) In einem rechtwinkligen Dreieck gilt: $a^2 + b^2 = c^2$. Darin sind a und b die Katheten und c die Hypotenuse.

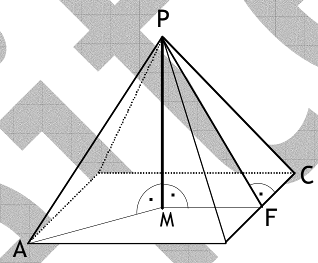
2) Die beiden Katheten spannen den rechten Winkel auf. Die Hypotenuse ist immer die längste Seite und liegt gegenüber dem rechten Winkel.

3) Man setzt die beiden bekannten Seiten in die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ ein und löst die erhaltene Gleichung nach der unbekannten Variablen auf.

4) Man muss zuerst d_1 im rechtwinkligen Dreieck ABC berechnen. Anschließend kann d im grauen Dreieck berechnet werden. Es gilt: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^s}$



5) Die Dreiecke AMP, MFP und FCP sind rechtwinklig.



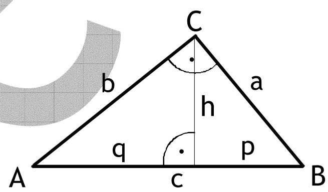
6) $d = a\sqrt{2}$ 7) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

8) Sichtweite über das Meer, Ausschlag eines Pendels, Montage zweier Bretter in einem rechten Winkel.

9) Die Höhe h teilt c in die Hypotenusenabschnitte q und p.

10) (I) $a^2 = c \cdot p$ und (II) $b^2 = c \cdot q$

11) $h^2 = q \cdot p$



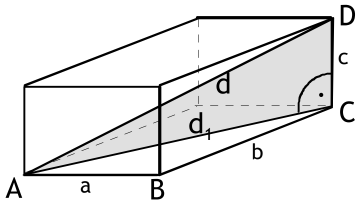
Antworten zur Checkliste:

1) In einem rechtwinkligen Dreieck gilt: $a^2 + b^2 = c^2$. Darin sind a und b die Katheten und c die Hypotenuse.

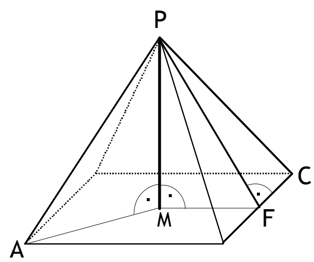
2) Die beiden Katheten spannen den rechten Winkel auf. Die Hypotenuse ist immer die längste Seite und liegt gegenüber dem rechten Winkel.

3) Man setzt die beiden bekannten Seiten in die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ ein und löst die erhaltene Gleichung nach der unbekannten Variablen auf.

4) Man muss zuerst d_1 im rechtwinkligen Dreieck ABC berechnen. Anschließend kann d im grauen Dreieck berechnet werden. Es gilt: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^s}$



5) Die Dreiecke AMP, MFP und FCP sind rechtwinklig.



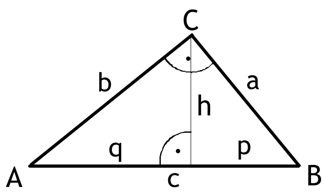
6) $d = a\sqrt{2}$ 7) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

8) Sichtweite über das Meer, Ausschlag eines Pendels, Montage zweier Bretter in einem rechten Winkel.

9) Die Höhe h teilt c in die Hypotenusenabschnitte q und p.

10) (I) $a^2 = c \cdot p$ und (II) $b^2 = c \cdot q$

11) $h^2 = q \cdot p$



Sehr geehrte Lehrerinnen und Lehrer,

mit diesen Folienvorlagen können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern effektiv und kräfteschonend das Thema „*Satzgruppe des Pythagoras*“ vermitteln. Alle OHP-Folien sind so konzipiert, dass Ihnen aufwendige Erklärungen an der Tafel erspart bleiben.

Jedes Kapitel beginnt mit einem einführenden Beispiel, mit dessen Hilfe sich die Schüler/innen die jeweiligen Regeln und Kenntnisse selbstständig erarbeiten können. Wichtige mathematische Sätze und Zusammenfassungen sind in den „*Merkekästen*“ hervorgehoben, die Ihre Schüler/innen direkt von der Folie abschreiben können. Im Anschluss daran folgen jeweils Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen, die ebenfalls von der Folie ins Schulheft übertragen werden können. Am Ende der Unterichtseinheit finden Sie eine Checkliste, mit der die Schüler/innen den eigenen Kenntnisstand in kompakter Form überprüfen und wiederholen können.

Wie Sie nun die einzelnen Folien optimal im Unterricht einsetzen, zeigen Ihnen folgende Hinweise und Anmerkungen.

Kapitel 1: Der Satz des Pythagoras

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen den Satz des Pythagoras kennen und sollen damit fehlende Seiten in rechtwinkligen Dreiecken berechnen.

Hinweise zur Durchführung:

Im einführenden Beispiel auf Folie 2 können die Schüler/innen den Zusammenhang $a^2 + b^2 = c^2$ auf „empirische“ Weise an verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken selbstständig entdecken und überprüfen. Die zweite Folie enthält den Satz des Pythagoras, seine geometrische Bedeutung und einen Beweis. Der Beweis kann von den Schülerinnen und Schülern mit etwas Hilfestellung auch selbstständig durchgeführt werden. Dazu ist es insbesondere sehr hilfreich, wenn die Schüler/innen vier identische rechtwinklige Dreiecke zeichnen, ausschneiden und selber in der auf Folie 3 abgebildeten Weise anordnen. In der Übung 1 (Folie 4) sollen die Schüler/innen dann mit dem Satz des Pythagoras fehlende Seiten in rechtwinkligen Dreiecken berechnen. Die Dreiecke der Übung 1 brauchen nur skizzenhaft ins Schulheft übertragen werden.

Zeitbedarf: ca. 2-3 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen aus dem Schulbuch auch mehr.

Kapitel 2: Pythagoras im Raum

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler trainieren ihr räumliches Vorstellungsvermögen, indem sie mit dem Satz des Pythagoras Strecken in Quadern, quadratischen Pyramiden und Kegeln berechnen.

Hinweise zur Durchführung:

In Beispiel 1 (Folie 5) sollen die Schüler/innen mit dem Satz des Pythagoras die Raumdiagonale eines Quaders berechnen. Anhand der Karos können die Schüler/innen den abgebildeten Quader auch dann leicht abskizzieren, wenn sie mit dem Zeichnen von Schrägbildern nicht mehr so vertraut sind. (Gegebenenfalls muss hier das Zeichnen von Schrägbildern kurz wiederholt werden.) Da es erfahrungsgemäß einigen Schüler/innen Mühe bereitet, anhand von Schrägbildern den Satz des Pythagoras aufzustellen, sollten die benötigten rechtwinkligen Dreiecke separat gezeichnet werden (vgl. Folie 5 und 6). Ausgehend von dem Zahlenbeispiel auf Folie 5 können dann insbesondere leistungsstärkere Schüler/innen die allgemeine Formel für die Raumdiagonale eines Quaders bzw. Würfels herleiten. Auf Folie 6 sind diese Formeln in einem *Merkekasten* zusammengefasst. In Übung 1 können die Schüler/innen dann ihr räumliches Vorstellungsvermögen trainieren und weitere Strecken in einem Quader berechnen. Welche rechtwinkligen Dreiecke es in einer quadratischen Pyramide gibt und wie der Satz des Pythagoras darin jeweils lautet, lernen die Schüler/innen in Beispiel 2 der Folie 7. Auch hier muss eventuell kurz wiederholt werden, wie man das Schrägbild einer quadratischen Pyramide skizziert. Die Karos geben dazu eine wertvolle Hilfestellung. In den Übungen 2 und 3 auf Folie 7 und 8 können die Schüler/innen dann das gelernte Wissen anwenden.

Zeitbedarf: ca. 5-6 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen aus dem Schulbuch auch mehr.

Kapitel 3: Aufstellen von Formeln

Lernziele:

Die Diagonalenformel in Quadraten und die Höhenformel in gleichseitigen Dreiecken sollen mit dem Satz des Pythagoras hergeleitet werden. Gleichzeitig soll der Umgang mit Variablen geübt werden.

Hinweise zur Durchführung:

Beispiel 1 auf Folie 9 zeigt den Schüler/innen, wie sie mit dem Satz des Pythagoras die Diagonalenformel in Quadraten herleiten können. Erfahrungsgemäß bereitet beim Lösen von Gleichungen mit einer zusätzlichen Variablen das Wurzelziehen Probleme. Eine kurze Wiederholung, wie man teilweise eine Wurzel zieht, kann hier vonnöten sein. In den beiden Übungen der Folie 11 sollen die Schüler/innen dann selber Strecken in Abhängigkeit von einer Variablen berechnen. Insbesondere bei

Übung 2 benötigen erfahrungsgemäß viele Schüler/innen den Tipp, dass man rechtwinklige Dreiecke mit den spitzen Winkeln 30° und 60° zu gleichseitigen Dreiecken erweitern kann.

Zeitbedarf: ca. 3-4 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen aus dem Schulbuch auch mehr.

Kapitel 4: Praktische Anwendungen

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man mit dem Satz des Pythagoras praktische Problemstellungen lösen kann.

Hinweise zur Durchführung:

Alle drei Beispiele können ohne weitere Erklärung direkt von den Schüler/innen bearbeitet werden. In Übung 1 auf Folie 12 soll die maximale Sichtweite von einem Schiffsmast aus über das Meer berechnet werden. In Übung 2 auf Folie 13 geht es um die Berechnung der Ausschlagshöhe eines physikalischen Pendels. Und in Übung 3 lernen die Schüler/innen, wie man den Satz des Pythagoras ausnutzen kann, um zwei Schrankbretter genau senkrecht aneinander zu fixieren.

Zeitbedarf: ca. 2 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen aus dem Schulbuch auch mehr.

Kapitel 5: Der Kathetensatz

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen den Kathetensatz kennen und sollen damit fehlende Strecken in rechtwinkligen Dreiecken berechnen.

Hinweise zur Durchführung:

Im einführenden Beispiel auf Folie 14 lernen die Schüler/innen den Kathetensatz auf „empirische“ Weise kennen. Besonders einprägsam wird der Kathetensatz, wenn die Schüler/innen die Zusammenhänge $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ an selbst gezeichneten rechtwinkligen Dreiecken erkunden. Auf der Folie 15 folgt ein *Merkekasten* mit dem Kathetensatz, die grafische Veranschaulichung und der Beweis. Mit der Hilfestellung auf Folie 15 können viele Schüler/innen den Beweis sicher auch selber durchführen. In den Übungen 1 und 2 der Folien 16 und 17 sollen die Schüler/innen dann den Kathetensatz an weiteren Dreiecken bestätigen bzw. fehlende Strecken in rechtwinkligen Dreiecken berechnen.

Zeitbedarf: ca. 3-4 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen aus dem Schulbuch auch mehr.

Kapitel 6: Der Höhensatz

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler lernen den Höhensatz kennen und sollen damit fehlende Strecken in rechtwinkligen Dreiecken berechnen.

Hinweise zur Durchführung:

Anhand der Zahlenbeispiele auf Folie 18 können die Schüler/innen die Beziehung $h^2 = q \cdot p$ recht leicht selbstständig entdecken. Ein Hinweis auf die Messungenauigkeit (insbesondere bei Dreieck 2) ist hier allerdings hilfreich. Nach der grafischen Veranschaulichung des Höhensatzes (Folie 19) folgt ein Beweis, den die Schüler/innen mit etwas Hilfestellung auch selbst-ständig durchführen können. In Übung 1 auf Folie 20 sollen die Schüler/innen den Höhensatz an zwei weiteren rechtwinkligen Dreiecken bzw. an selbst gezeichneten Dreiecken bestätigen. Wie man den Höhensatz anwendet, um in rechtwinkligen Dreiecken fehlende Strecken zu berechnen, können die Schüler/innen schließlich in Übung 2 auf Folie 21 trainieren.

Zeitbedarf: ca. 3-4 Schulstunden; je nach Umfang der zusätzlichen Übungen aus dem Schulbuch auch mehr.

Exkurs: Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke

Mit der Folie 22 können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern zwei Konstruktionsmöglichkeiten für rechtwinklige Dreiecke vorstellen, die in vielen Beispielen und Übungen des vorliegenden Themas benötigt werden. In der ersten (trivialen) Variante werden die Katheten entlang der Karolinien des Heftes gezeichnet. Wie man ein rechtwinkliges Dreieck aber auch so zeichnen kann, dass es auf der Hypotenuse liegt, zeigt die zweite Konstruktionsvariante.

Zeitbedarf: ca. 10-20 min.

Checkliste - was man nun wissen sollte

Anhand der Fragen der Checkliste auf Folie 23 können Sie die wichtigsten Kenntnisse zum Thema *„Satzgruppe des Pythagoras“* in kompakter Form abfragen und wiederholen. Auf diese Weise erhalten Ihre Schüler/innen einen guten Überblick über den eigenen Kenntnisstand. Die Antworten auf die Fragen finden Sie als Kopiervorlage in doppelter Ausführung, sodass Sie nur jeweils 1 Blatt für zwei Schüler/innen kopieren müssen.

Zeitbedarf: ca. 30 min.