Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2012:

Lösungen zur Prüfung 2012: Pflichtbereich

Aufgabe P1:

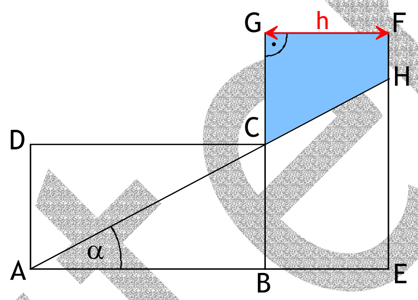
Berechnung des Flächeninhalts des Vierecks CHFG:

Das Viereck CHFG ist ein Trapez mit der Höhe $h = \overline{FG}$ (siehe Figur 1).

Dessen Flächeninhalt ist (s. Formelsammlung): $\mathbf{A_{CHFG} = \frac{1}{2}(\overline{CG}+\overline{FH})\cdot h}$

Da die beiden Rechtecke ABCD und BEFG laut Aufgabentext kongruent (= deckungsgleich) sein sollen, ist $\overline{FG} = \overline{AD} = 4{,}5$ cm.

Somit folgt: <u>h = 4,5 cm</u>



Figur 1

Es müssen also noch die Längen $\overline{CG}$ und $\overline{FH}$ berechnet werden.

→ <u>Berechnung der Länge $\overline{CG}$:</u>

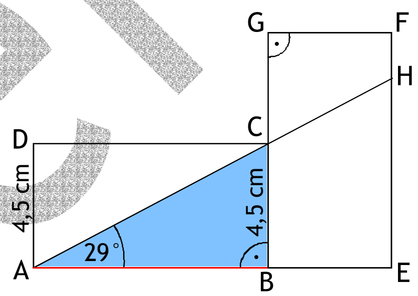
Für die Länge $\overline{CG}$ gilt: $\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC}$ (siehe Figur 2)

Darin ist $\overline{BC} = \overline{AD} = 4{,}5$ cm, sodass gilt:

$\mathbf{\overline{CG} = \overline{BG} - 4{,}5\ cm}$

Wegen der Kongruenz der beiden Rechtecke ABCD und BEFG gilt außerdem:

$\overline{BG} = \overline{AB}$. Die Länge $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).



Figur 2

Es gilt: $\tan 29^\circ = \frac{4{,}5}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB}$

$\Leftrightarrow \quad \overline{AB} \cdot \tan 29^\circ = 4{,}5 \quad | : \tan 29^\circ$

$\Leftrightarrow \quad \overline{AB} = 8{,}12$ cm. Damit ist auch $\overline{BG} = 8{,}12$ cm.

Für $\overline{CG} = \overline{BG} - 4{,}5$ cm erhält man somit: $\overline{CG}$ = <u>3,62 cm</u>

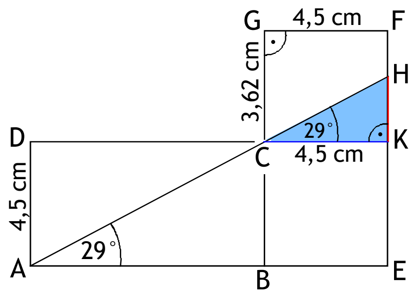
→ <u>Berechnung der Länge $\overline{FH}$:</u>

Zur Berechnung der Länge $\overline{FH}$ muss man zunächst die Hilfslinie $\overline{CK}$ einzeichnen, sodass das rechtwinklige Dreieck CKH entsteht (siehe Figur 3). Für die Länge $\overline{FH}$ gilt: $\overline{FH} = \overline{FK} - \overline{HK}$

Darin ist $\overline{FK} = \overline{CG} = 3{,}62$ cm (siehe oben), sodass gilt:

$\mathbf{\overline{FH} = 3{,}62\ cm - \overline{HK}}$

Die Länge $\overline{HK}$ kann im Dreieck CHK mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Es gilt:



Figur 3

$\tan 29^\circ = \frac{\overline{HK}}{4{,}5} \quad | \cdot 4{,}5$

$\Leftrightarrow \quad 2{,}49 = \overline{HK}$ bzw. $\overline{HK} = 2{,}49$ cm

Für $\overline{FH}$ folgt damit: $\overline{FH}$ = <u>1,13 cm</u>

Für den Flächeninhalt $A_{CHFG} = \frac{1}{2}(\overline{CG}+\overline{FH})\cdot h$ folgt somit: $A_{CHFG} = \frac{1}{2}(3{,}62 + 1{,}13)\cdot 4{,}5 = \mathbf{10{,}69\ cm^2}$

<u>**Ergebnis:**</u> Der Flächeninhalt des Vierecks CHFG beträgt: <u>**$A_{CHFG} = 10{,}69\ cm^2$**</u>.

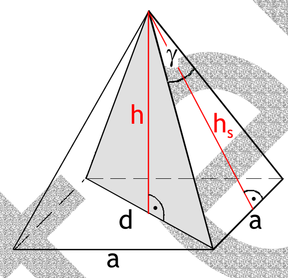
Lösungen zur Prüfung 2012: Pflichtbereich

Aufgabe P2:

Berechnung der Oberfläche einer Pyramidenhälfte:

Für die Oberfläche einer Pyramidenhälfte gilt: $O_{PH} = \frac{1}{2}G + 2D_s + D_{grau}$

Darin ist G der Flächeninhalt der Grundfläche, D_s der Flächeninhalt eines Seitendreiecks der Pyramide und D_{grau} der Flächeninhalt des grauen Dreiecks in Figur 1.



Figur 1

Mit den entsprechenden Formeln erhält man (siehe Formelsammlung):

$$O_{PH} = \frac{1}{2}a^2 + 2\cdot\frac{1}{2}a\cdot h_s + \frac{1}{2}d\cdot h \quad \text{(mit der Diagonalen d der Grundfläche)}$$

$$\Leftrightarrow \quad O_{PH} = \frac{1}{2}a^2 + a\cdot h_s + \frac{1}{2}d\cdot h$$

Mit a = 8,6 cm folgt: $O_{PH} = 36{,}98\text{ cm}^2 + 8{,}6\cdot h_s + \frac{1}{2}d\cdot h$

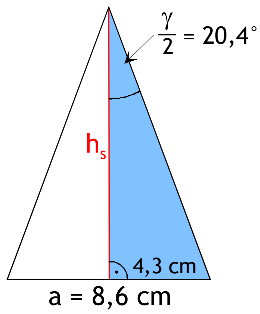
Für die Diagonale d gilt (siehe Formelsammlung): $d = 8{,}6\sqrt{2} = 12{,}16$ cm

Damit folgt: $\mathbf{O_{PH} = 36{,}98\ cm^2 + 8{,}6\cdot h_s + 6{,}08\cdot h}$

Man muss also noch die Seitenhöhe h_s und die Pyramidenhöhe h berechnen.

→ Berechnung der Seitenhöhe h_s:

Die Seitenhöhe h_s kann mit der Tangensfunktion berechnet werden. In einem gleichschenkligen Seitendreieck der Pyramide gilt (siehe Figur 2):



Figur 2

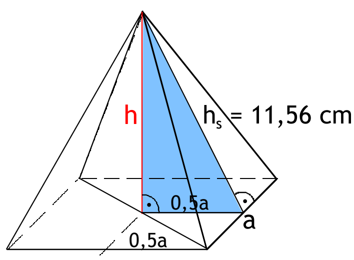
$$\tan 20{,}4° = \frac{4{,}3}{h_s} \quad |\cdot h_s$$

$$\Leftrightarrow \quad h_s\cdot\tan 20{,}4° = 4{,}3 \quad |:\tan 20{,}4°$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{h_s = 11{,}56\text{ cm}}$$

→ Berechnung der Pyramidenhöhe h:

Die Pyramidenhöhe h kann nun mit dem Satz des Pythagoras im markierten Dreieck von Figur 3 berechnet werden. Mit 0,5a = 4,3 cm erhält man:



Figur 3

$$(11{,}56\text{ cm})^2 = h^2 + (4{,}3\text{ cm})^2 \quad |-(4{,}3\text{ cm})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 115{,}14\text{ cm}^2 = h^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad 10{,}73 = h \text{ bzw. } \underline{h = 10{,}73\text{ cm}}$$

Mit h_s = 11,56 cm und h = 10,73 cm erhält man schließlich für $O_{PH} = 36{,}98\text{ cm}^2 + 8{,}6\cdot h_s + \cdot 6{,}08\cdot h$:

$O_{PH} = 36{,}98\text{ cm}^2 + 99{,}42\text{ cm}^2 + 65{,}24\text{ cm}^2 = \mathbf{201{,}64\ cm^2}$

__Ergebnis:__ Eine Pyramidenhälfte hat die Oberfläche $\underline{\mathbf{O_{PH} = 201{,}64\ cm^2}}$.

Lösungen zur Prüfung 2012: Pflichtbereich

Aufgabe P3:

Berechnung des Prismenvolumens:

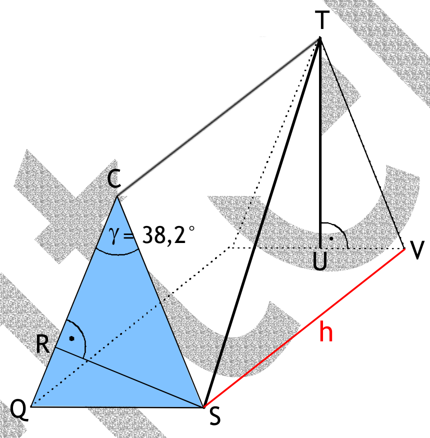
Für das Volumen eines Prismas gilt (siehe Formelsammlung): $V = G \cdot h$

Im vorliegenden Dreiecksprisma ist das Dreieck QSC die Grundfläche G und die Länge $\overline{SV}$ die Prismenhöhe h (siehe Figur 1).

Es gilt also: $\mathbf{V = A_{QSC} \cdot h}$

(Hinweis: Die Punkte Q und V wurden in Figur 1 zusätzlich eingefügt.)

Man muss also den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks QSC und die Länge $\overline{SV} = h$ berechnen.



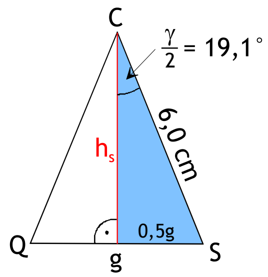
Figur 1

→ Berechnung des Flächeninhalts A_{QSC}:

Für den Flächeninhalt A_{QSC} gilt (siehe Figur 2):

$$A_{QSC} = \frac{1}{2} g \cdot h_s$$

Die Grundseite g und die Höhe h_s können im markierten Dreieck von Figur 2 berechnet werden.
(Man beachte dabei, dass die Höhe h_s den Winkel γ und die Grundseite g des gleichschenkligen Dreiecks QSC halbiert.)



Figur 2

- Für die Grundseite g gilt: $\sin 19{,}1° = \frac{0{,}5g}{6{,}0} \quad | \cdot 6{,}0$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}96 = 0{,}5g \quad | :0{,}5$

$\Leftrightarrow \quad 3{,}92 = g$ bzw. $g = 3{,}92$ cm

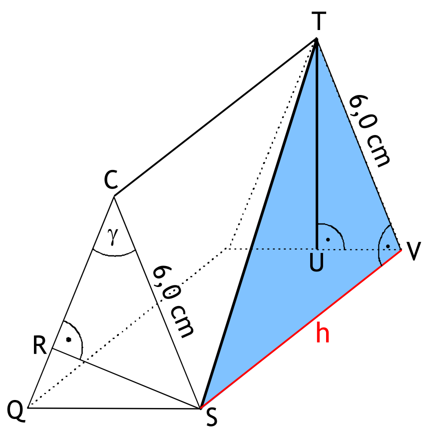
- Für die Höhe h_s gilt: $\cos 19{,}1° = \frac{h_s}{6{,}0} \quad | \cdot 6{,}0$

$\Leftrightarrow \quad 5{,}67 = h_s$ bzw. $h_s = 5{,}67$ cm

Mit $g = 3{,}92$ cm und $h_s = 5{,}67$ cm erhält man: $\underline{A_{QSC} = 11{,}11 \text{ cm}^2}$

→ Berechnung der Länge $h = \overline{SV}$:

Die Prismenhöhe h kann im Dreieck SVT mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 3).
Man beachte darin: $\overline{TV} = \overline{CS} = 6{,}0$ cm.



Figur 3

Es gilt: $\overline{ST}^2 = h^2 + (6{,}0 \text{ cm})^2 \quad | -(6{,}0 \text{ cm})^2$

$\Leftrightarrow \quad \overline{ST}^2 - (6{,}0 \text{ cm})^2 = h^2 \quad |$ Vertauschen der Seiten

$\Leftrightarrow \quad h^2 = \overline{ST}^2 - 36 \text{ cm}^2$

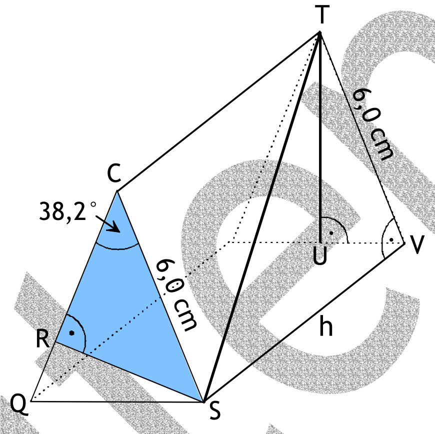
Die Länge $\overline{ST}$ wiederum kann mithilfe der Länge des Streckenzugs RSTU berechnet werden. Es gilt:

$\overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TU} = 23{,}4 \text{ cm} \quad | -\overline{RS} - \overline{TU}$

$\Leftrightarrow \quad \overline{ST} = 23{,}4 \text{ cm} - \overline{RS} - \overline{TU}$

Lösungen zur Prüfung 2012: Pflichtbereich

- Die Länge $\overline{TU} = h_s$ wurde bereits oben in Figur 2 berechnet: $\overline{TU} = 5{,}67$ cm
- Die Länge $\overline{RS}$ kann man mithilfe der Sinusfunktion im markierten Dreieck von Figur 4 berechnen. Es gilt:



Figur 4

$$\sin 38{,}2° = \frac{\overline{RS}}{6{,}0} \quad | \cdot 6{,}0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3{,}71 = \overline{RS} \quad \text{bzw.} \quad \overline{RS} = 3{,}71 \text{ cm}$$

Mit $\overline{TU} = 5{,}67$ cm und $\overline{RS} = 3{,}71$ cm erhält man schließlich für $\overline{ST} = 23{,}4 \text{ cm} - \overline{RS} - \overline{TU}$:

$\overline{ST} = 14{,}02$ cm

Damit kann nun die gesuchte Prismenhöhe h berechnet werden. Aus $h^2 = \overline{ST}^2 - 36 \text{ cm}^2$ folgt:

$$h^2 = 160{,}56 \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{}$$

$\Rightarrow$ <u>h = 12,67 cm</u>

Mit $A_{QSC} = 11{,}11 \text{ cm}^2$ und $h = 12{,}67$ cm erhält man schließlich das Prismenvolumen $V = A_{QSC} \cdot h$:

$V = 11{,}11 \text{ cm}^2 \cdot 12{,}67 \text{ cm} = 140{,}76 \text{ cm}^3$

<u>**Ergebnis:**</u> Das Volumen des Prismas beträgt <u>**$V = 140{,}76 \text{ cm}^3$**</u>.

Aufgabe P4:

<u>**Wahrscheinlichkeit für zwei Autos mit gleicher Plakettenfarbe:**</u>

Die Ausgänge, bei denen die beiden ausfahrenden Autos Plaketten mit gleicher Farbe haben, sind:

(gr; gr), **(ge; ge)** und **(r; r)**, mit den Bezeichnungen gr = grün, ge = gelb und r = rot.

Man beachte: Das Hinausfahren zweier Autos aus dem Parkhaus entspricht einem Ziehen aus einer Urne <u>*ohne*</u> Zurücklegen. In der entsprechenden Modellurne sind beim ersten Zug insgesamt 85 Kugeln (bzw. Autos) und beim zweiten Zug nur noch 84 Kugeln (bzw. Autos) enthalten. Außerdem fehlt nach dem ersten hinausgefahrenen Auto im Parkhaus ein Auto mit derjenigen Plakettenfarbe, die das erste hinausgefahrene Auto hat.

Die Wahrscheinlichkeiten für die drei Fälle können dann mit der Produktregel berechnet werden:

$$P(gr; gr) = \frac{51}{85} \cdot \frac{50}{84} = \mathbf{\frac{2550}{7140}} \;; \quad P(ge; ge) = \frac{23}{85} \cdot \frac{22}{84} = \mathbf{\frac{506}{7140}} \;; \quad P(r; r) = \frac{11}{85} \cdot \frac{10}{84} = \mathbf{\frac{110}{7140}}$$

Damit erhält man mit der Summenregel:

$$\mathbf{P(gleiche\ Farbe)} = \frac{2550}{7140} + \frac{506}{7140} + \frac{110}{7140} = \mathbf{\frac{3166}{7140}} \approx \mathbf{44{,}3\ \%}$$

<u>**Ergebnis:**</u> Die Wahrscheinlichkeit, dass beide ausfahrenden Autos die gleiche Plakettenfarbe haben, beträgt <u>**44,3 %**</u>.