Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2015:

Musterseiten

Lösungen zur Prüfung 2015: Pflichtbereich

Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Dreiecks EBC gilt: $u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CE}$, mit $\overline{CE} = 9{,}2$ cm.

- Die Länge $\overline{BC}$ kann im Dreieck DBC mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{DC}$ kennt, die im Dreieck ADC ebenfalls mit der Sinusfunktion berechnet werden kann (siehe Figur 1).
- Für die Länge $\overline{EB}$ gilt $\overline{EB} = \overline{DB} - \overline{DE}$. Die Länge $\overline{DB}$ kann im Dreieck DBC mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Für $\overline{DE}$ gilt $\overline{DE} = \overline{AD}$, weil das Dreieck AEC gleichschenklig ist. $\overline{AD}$ kann im Dreieck ADC mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3).

Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst alle Seiten des Dreiecks ADC berechnen. Beachten Sie außerdem, dass im gleichschenkligen Dreieck AEC die Grundseite $\overline{AE}$ von der Höhe $\overline{DC}$ halbiert wird.*

Für den Umfang des Dreiecks EBC gilt (siehe Figur 1): $\mathbf{u = \overline{EB} + \overline{BC} + 9{,}2\ cm}$

Die beiden Längen $\overline{EB}$ und $\overline{BC}$ können folgendermaßen berechnet werden:

Berechnung der Länge $\overline{BC}$:

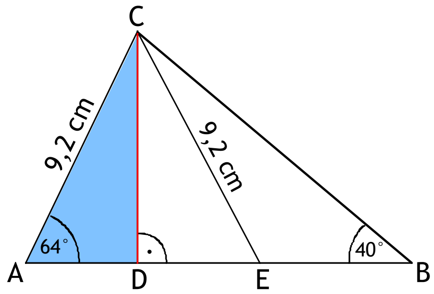
Im Dreieck DBC gilt (siehe Figur 1): $\sin 40^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$

→ Berechnung der Länge $\overline{DC}$:

Für $\overline{DC}$ gilt im Dreieck ADC (siehe Figur 1):

$$\sin 64^\circ = \frac{\overline{DC}}{9{,}2} \quad | \cdot 9{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad 8{,}27 = \overline{DC} \text{ bzw. } \overline{DC} = 8{,}27 \text{ cm}$$



Figur 1

Einsetzen in $\sin 40^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$ ergibt:

$$\sin 40^\circ = \frac{8{,}27}{\overline{BC}} \quad | \cdot \overline{BC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BC} \cdot \sin 40^\circ = 8{,}27 \quad | \ : \sin 40^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\overline{BC} = 12{,}87\ cm}$$

Berechnung der Länge $\overline{EB}$:

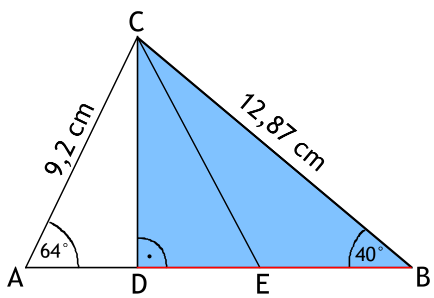
Für die Länge $\overline{EB}$ gilt: $\overline{EB} = \overline{DB} - \overline{DE}$

→ Berechnung der Länge $\overline{DB}$:

Für $\overline{DB}$ gilt im Dreieck DBC (siehe Figur 2):

$$\cos 40^\circ = \frac{\overline{DB}}{12{,}87} \quad | \cdot 12{,}87$$

$$\Leftrightarrow \quad 9{,}86 = \overline{DB} \text{ bzw. } \overline{DB} = \underline{9{,}86 \text{ cm}}$$



Figur 2

Musterseiten

Lösungen zur Prüfung 2015: Pflichtbereich

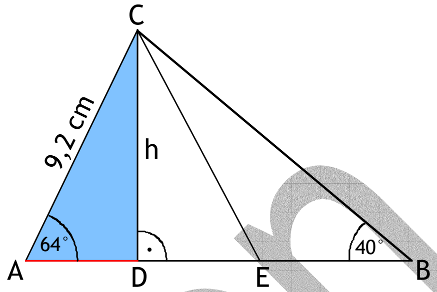
→ Berechnung der Länge $\overline{DE}$:

Weil das Dreieck AEC laut Aufgabenstellung gleichschenklig ist, wird die Grundseite $\overline{AE}$ von der Höhe h halbiert, sodass gilt: $\overline{DE} = \overline{AD}$ (siehe Figur 3).
Die Länge $\overline{AD}$ kann im Dreieck ADC mit der Kosinusfunktion berechnet werden Es gilt:

$$\cos 64^\circ = \frac{\overline{AD}}{9{,}2} \quad | \cdot 9{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4{,}03 = \overline{AD} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AD} = 4{,}03 \text{ cm}$$

Damit ist auch $\overline{DE}$ = 4,03 cm.



Figur 3

Einsetzen von $\overline{DB}$ = 9,86 cm und $\overline{DE}$ = 4,03 cm in $\overline{EB} = \overline{DB} - \overline{DE}$ ergibt: **$\overline{EB}$ = 5,83 cm**

Mit $\overline{BC}$ = 12,87 cm und $\overline{EB}$ = 5,83 cm erhält man schließlich für $u = \overline{EB} + \overline{BC} + 9{,}2$ cm: **u = 27,90 cm**

Ergebnis: Der Umfang des Dreiecks EBC beträgt **u = 27,90 cm**.

Aufgabe P2:

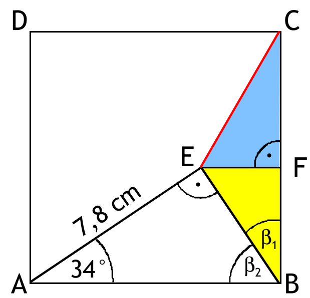
Lösungsübersicht:

Zunächst sollte man die Strecke $\overline{CE}$ und die Hilfslinie $\overline{EF}$ einzeichnen (siehe Figur 1). Die Länge $\overline{CE}$ kann dann im Dreieck EFC mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Längen $\overline{EF}$ und $\overline{FC}$ kennt.

- Die Länge $\overline{EF}$ kann im Dreieck EBF mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel $\beta_1 = 90^\circ - \beta_2$ und die Länge $\overline{BE}$ kennt (siehe Figur 1). Den Winkel β_2 erhält man mithilfe der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABE. Die Länge $\overline{BE}$ kann im Dreieck ABE mit der Tangensfunktion bestimmt werden (siehe Figur 3).
- Für die Länge $\overline{FC}$ gilt: $\overline{FC} = \overline{BC} - \overline{BF}$. Weil das Viereck ABCD ein Quadrat ist, gilt: $\overline{BC} = \overline{AB}$.
Die Länge $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABE mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3).
Die Länge $\overline{BF}$ kann im Dreieck EBF mit der Kosinusfunktion berechnet werden, da man die Länge $\overline{BE}$ und den Winkel β_1 bereits bestimmt hat.

Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst alle fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABE berechnen und die Hilfslinie $\overline{EF}$ einzeichnen.*

Im Dreieck EFC kann die Länge $\overline{CE}$ mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 1). Es gilt: $\overline{CE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FC}^2$



Figur 1

Berechnung der Länge $\overline{EF}$:

Für die Länge $\overline{EF}$ gilt im Dreieck EBF (siehe Figur 1): $\sin\beta_1 = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{EB}}$

→ Berechnung des Winkels β_1:

Für den Winkel β_1 gilt: $\beta_1 = 90^\circ - \beta_2$. Den Winkel β_2 erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABE.
Es gilt: $34^\circ + \beta_2 + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \beta_2 = 56^\circ$
Damit folgt: $\beta_1 = 34^\circ$

© Mathematik-Verlag 2015, www.matheverlag.com

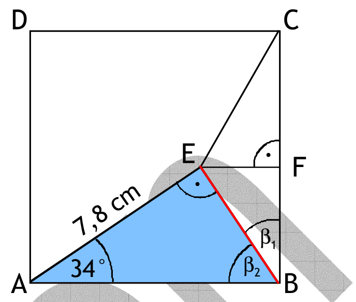
Lösungen zur Prüfung 2015: Pflichtbereich

→ <u>Berechnung der Länge $\overline{EB}$:</u>

Für $\overline{EB}$ gilt im Dreieck ABE (siehe Figur 2):

$$\tan 34^\circ = \frac{\overline{EB}}{7{,}8} \quad | \cdot 7{,}8$$

$$\Leftrightarrow \quad 5{,}26 = \overline{EB} \quad \text{bzw.} \quad \overline{EB} = \underline{5{,}26\text{ cm}}$$



Figur 2

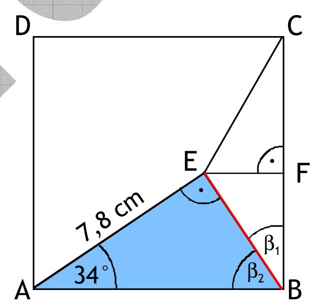
Einsetzen von $\beta_1 = 34^\circ$ und $\overline{EB} = 5{,}26$ cm in $\sin\beta_1 = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}}$ ergibt:

$$\sin 34^\circ = \frac{\overline{EF}}{5{,}26} \quad | \cdot 5{,}26$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}94 = \overline{EF} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\overline{EF} = 2{,}94\text{ cm}}$$

<u>Berechnung der Länge $\overline{FC}$:</u>

Für die Länge $\overline{FC}$ gilt (siehe Figur 3): $\overline{FC} = \overline{BC} - \overline{BF}$



Figur 3

→ <u>Berechnung der Länge $\overline{BC}$:</u>

Weil das Viereck ABCD ein Quadrat ist, gilt $\overline{BC} = \overline{AB}$.

Die Länge $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABE mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Es gilt:

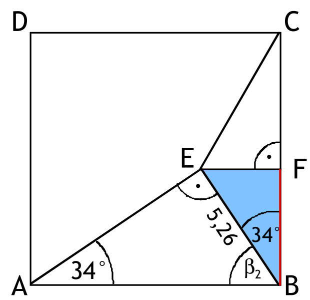
$$\cos 34^\circ = \frac{7{,}8}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB} \cdot \cos 34^\circ = 7{,}8 \quad | : \cos 34^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB} = 9{,}41\text{ cm}$$

Und wegen $\overline{BC} = \overline{AB}$ ist auch $\overline{BC} = \underline{9{,}41\text{ cm}}$.

→ <u>Berechnung der Länge $\overline{BF}$:</u>



Figur 4

Die Länge $\overline{BF}$ kann mit der Kosinusfunktion im Dreieck EBF berechnet werden (siehe Figur 4), da man nun die Länge $\overline{EB} = 5{,}26$ cm und den Winkel $\beta_1 = 34^\circ$ kennt (siehe oben).

Es gilt: $$\cos 34^\circ = \frac{\overline{BF}}{5{,}26} \quad | \cdot 5{,}26$$

$$\Leftrightarrow \quad 4{,}36 = \overline{BF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BF} = \underline{4{,}36\text{ cm}}$$

Mit $\overline{BC} = 9{,}41$ cm und $\overline{BF} = 4{,}36$ cm erhält man: $\mathbf{\overline{FC}} = 9{,}41\text{ cm} - 4{,}36\text{ cm} = \mathbf{5{,}05\text{ cm}}$.

Einsetzen von $\overline{EF} = 2{,}94$ cm und $\overline{FC} = 5{,}05$ cm in $\overline{CE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FC}^2$ ergibt schließlich:

$$\overline{CE}^2 = (2{,}94)^2 + (5{,}05)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{CE}^2 = 34{,}15 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{\overline{CE} = 5{,}84\text{ cm}}$$

<u>Ergebnis</u>: Die Länge $\overline{CE}$ ist <u>$\mathbf{\overline{CE} = 5{,}84\text{ cm}}$</u>.

Musterseiten

Lösungen zur Prüfung 2015: Pflichtbereich

Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:
Man muss überprüfen, ob das Wasservolumen V_W größer oder kleiner ist als das Pyramidenvolumen V_P. Das Wasservolumen V_W kann mit dem Kegelvolumen berechnet werden, da V_W laut Aufgabenstellung halb so groß sein soll wie das Kegelvolumen. Das Pyramidenvolumen kann mit den Längen $a = 16{,}0\,\text{cm}$ und $s_P = 24{,}0\,\text{cm}$ berechnet werden (siehe Figur 1).

Berechnung des Wasservolumens V_W:

Für das Wasservolumen V_W soll laut Aufgabenstellung gelten: $V_W = \frac{1}{2} V_K$; mit dem Kegelvolumen V_K.

Für das Kegelvolumen V_K gilt (siehe Formelsammlung): $V_K = \frac{1}{3} \pi\, r_K^2 \cdot h_K$

Wegen $d_K = 20$ cm ist der Radius r_K des Kegelgrundkreises $r_K = 10$ cm.
Mit der Kegelhöhe $h_K = 30{,}0$ cm folgt: $V_K = 3141{,}6\ \text{cm}^3$

Damit erhält man für das Wasservolumen: $\mathbf{V_W = 1570{,}8\ cm^3}$

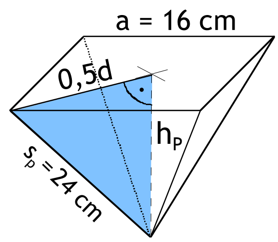
Berechnung des Pyramidenvolumens V_P:

Für das Pyramidenvolumen gilt (siehe Formelsammlung): $V_P = \frac{1}{3} a^2 \cdot h_P$

Mit a = 16,0 cm erhält man: $V_P = \frac{256}{3} \cdot h_P$

→ Berechnung der Pyramidenhöhe h_P:

Die Pyramidenhöhe h_P kann im markierten Dreieck der Figur 1 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Diagonale d (bzw. 0,5 d) der quadratischen Grundfläche kennt.



Figur 1

Es gilt: $24^2 = (0{,}5d)^2 + h_P^2$ bzw. $576 = (0{,}5d)^2 + h_P^2$

Mit $d = a\sqrt{2}$ (siehe Formelsammlung) und a = 16,0 cm erhält man:
d = 22,62 cm bzw. 0,5 d = 11,31 cm.

Damit folgt durch Einsetzen in $576 = (0{,}5d)^2 + h_P^2$:

$$576 = 11{,}31^2 + h_P^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 576 = 127{,}92 + h_P^2 \quad | -127{,}92$$
$$\Leftrightarrow \quad 448{,}08 = h_P^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow \quad 21{,}17 = h_P \text{ bzw. } \underline{h_P = 21{,}17\ \text{cm}}$$

Für das Pyramidenvolumen $V_P = \frac{256}{3} \cdot h_P$ folgt somit: $\mathbf{V_P = 1806{,}5\ cm^3}$

Ergebnis: Das Wasser **läuft** somit beim Umfüllen in die Pyramide **nicht über**, weil das Wasservolumen V_W kleiner ist als das Pyramidenvolumen V_P. (Es ist $V_W = 1570{,}8\ \text{cm}^3$ und $V_P = 1806{,}5\ \text{cm}^3$.)

Musterseiten

Lösungen zur Prüfung 2015: Pflichtbereich

Aufgabe P4:

Berechnung der fehlenden Wahrscheinlichkeit:

Variante A:

Die fehlende Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit $P_{grün}$, bei nur einem Zug von den 20 Kugeln eine grüne Kugel zu ziehen. Um die Wahrscheinlichkeit $P_{grün}$ berechnen zu können, muss man wissen, wie viele grüne Kugeln in dem Behälter sind. Dazu muss man zuerst die Anzahl der roten und blauen Kugeln berechnen:

Mit $P_{rot} = 20\ \%$ erhält man: 20 % von 20 Kugeln sind $0{,}20 \cdot 20$ Kugeln = 4 rote Kugeln

Mit $P_{blau} = \frac{3}{10}$ erhält man: $\frac{3}{10}$ von 20 Kugeln sind $\frac{3}{10} \cdot 20$ Kugeln = 6 blaue Kugeln

Also müssen 10 grüne Kugeln (= 20 – 4 – 6) im Behälter sein.

Somit folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P_{grün} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\ \%$

Ergebnis: Die fehlende Wahrscheinlichkeit ist **$P_{grün} = 0{,}50 = 50\ \%$** .

Variante B:

In einem Baumdiagramm ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, deren Äste von einem gemeinsamen Knotenpunkt ausgehen, immer 1. Somit muss für die fehlende Wahrscheinlichkeit $P_{grün}$ gelten:

$$20\ \% + \frac{3}{10} + P_{grün} = 1$$

$$\Leftrightarrow 0{,}20 + 0{,}30 + P_{grün} = 1 \quad |\ -0{,}20 - 0{,}30$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{P_{grün} = 0{,}50 = 50\ \%}$$

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugeln zu ziehen:

Man beachte:

1.) Das gleichzeitige Ziehen zweier Kugeln entspricht einem zweimaligen **Ziehen von jeweils einer Kugel ohne Zurücklegen**. Das heißt, dass sich beim zweiten Zug nur noch 19 Kugeln im Behälter befinden und eine Kugel von der zuerst gezogenen Farbe weniger vorhanden ist.

2.) Die Wahrscheinlichkeit, insgesamt höchstens eine grüne Kugeln zu erwischen, sollte über das **Gegenereignis** *„man zieht zwei grüne Kugeln"* berechnet werden. Ansonsten wird die Berechnung recht aufwändig. Es gilt also: **P(höchstens eine grüne K.) = 1 – P(zwei grüne Kugeln)**

Die Wahrscheinlichkeit P(zwei grüne Kugeln) kann mit den Wahrscheinlichkeiten P_1 und P_2, beim ersten und beim zweiten Zug jeweils eine grüne Kugel zu ziehen, berechnet werden:

Beim „ersten" Zug gilt: $P_1(\text{eine grüne Kugel}) = \frac{10}{20}$. Beim „zweiten" Zug gilt: $P_2(\text{eine grüne Kugel}) = \frac{9}{19}$

(Man beachte, dass sich nach dem ersten Zug in dem Behälter nur noch 19 Kugeln befinden, wovon nur noch 9 Kugeln grün sind - siehe oben.)

Mit der Produktregel erhält man dann: $P(\text{zwei grüne Kugeln}) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{90}{380}$.

Damit folgt: **P(höchstens eine grüne K.)** $= 1 - \frac{90}{380} = \frac{290}{380} \approx$ **76,3 %.**

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, beträgt **ca. 76,3 %**.

Musterseiten