Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2018:

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich

Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

Für den Flächeninhalt des Trapezes EBCF gilt: $A_{EBCF} = \frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{CF}) \cdot \overline{BC}$, wobei $\overline{AD} = 5{,}4$ cm bereits angegeben ist und $\overline{BC} = \overline{AD}$ gilt.

- Für die Länge $\overline{EB}$ gilt: $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE}$, mit $\overline{AB} = 14{,}5$ cm. Die Strecke $\overline{AE}$ kann im Dreieck AED mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).
- Für die Länge $\overline{CF}$ gilt: $\overline{CF} = \overline{CD} - \overline{DF}$, mit $\overline{CD} = \overline{AB} = 14{,}5$ cm. Die Länge $\overline{DF}$ kann im Dreieck DEF mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{DE}$ und den Winkel δ_2 kennt (siehe Figur 2 und 3). Die Länge $\overline{DE}$ wiederum kann im Dreieck AED mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck AED die Längen $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ berechnen und den Winkel $\delta_2 = 90^\circ - \delta_1$ eintragen.*

Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes EBCF:

Für den Flächeninhalt des Trapezes EBCF gilt (siehe Formelsammlung): $A_{EBCF} = \frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{CF}) \cdot \overline{BC}$.

Und mit $\overline{BC} = \overline{AD} = 5{,}4$ cm: $A_{EBCF} = \mathbf{\frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{CF}) \cdot 5{,}4}$

→ Berechnung der Länge $\overline{EB}$:

Für $\overline{EB}$ gilt: $\overline{EB} = 14{,}5 \text{ cm} - \overline{AE}$

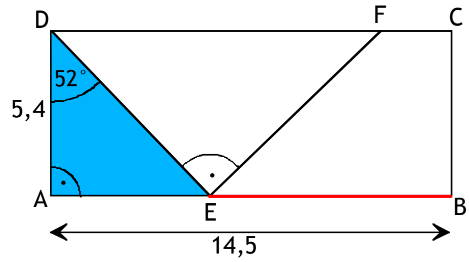
Die Strecke $\overline{AE}$ kann im Dreieck AED mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).

Es gilt:

$$\tan 52^\circ = \frac{\overline{AE}}{5{,}4} \quad | \cdot 5{,}4$$

$$\Leftrightarrow \quad 6{,}91 = \overline{AE} \text{ bzw. } \overline{AE} = 6{,}91 \text{ cm}$$

Damit folgt: $\mathbf{\overline{EB} = 7{,}59}$ **cm**



Figur 1

→ Berechnung der Länge $\overline{CF}$:

Für die Länge $\overline{CF}$ gilt: $\overline{CF} = 14{,}5 \text{ cm} - \overline{DF}$.

Die Länge $\overline{DF}$ kann im Dreieck DEF mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{DE}$ und den Winkel δ_2 kennt. Für δ_2 gilt:

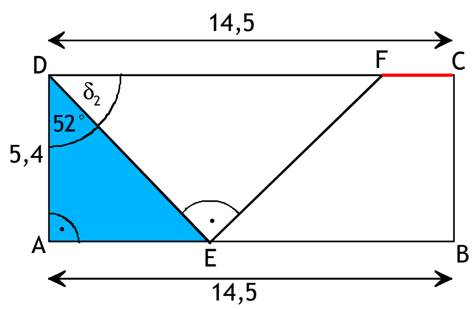
$\delta_2 = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

Für $\overline{DE}$ gilt im Dreieck AED (siehe Figur 2):

$$\cos 52^\circ = \frac{5{,}4}{\overline{DE}} \quad | \cdot \overline{DE}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{DE} \cdot \cos 52^\circ = 5{,}4 \quad | : \cos 52^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{DE} = 8{,}77 \text{ cm}$$



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich

Mit $\delta_2 = 38^\circ$ und $\overline{DE} = 8{,}77$ cm erhält man mit der Kosinusfunktion im Dreieck DEF (s. Figur 3):

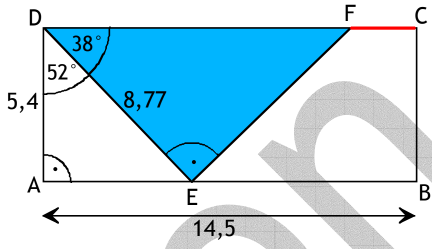
$$\cos 38^\circ = \frac{8{,}77}{\overline{DF}} \quad | \cdot \overline{DF}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{DF} \cdot \cos 38^\circ = 8{,}77 \quad | : \cos 38^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{DF} = 11{,}13 \text{ cm}$$

Damit folgt für $\overline{CF}$:

$\overline{\mathbf{CF}}$ = 14,5 cm – 11,13 cm = **3,37 cm**



Figur 3

Einsetzen von $\overline{EB} = 7{,}59$ cm und $\overline{CF} = 3{,}37$ cm in $A_{EBCF} = \frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{CF}) \cdot 5{,}4$ ergibt schließlich:

$\mathbf{A_{EBCF} = 29{,}6\ cm^2}$

Ergebnis: Das Trapez EBCF hat den Flächeninhalt **$A_{EBCF} = 29{,}6\ cm^2$**.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

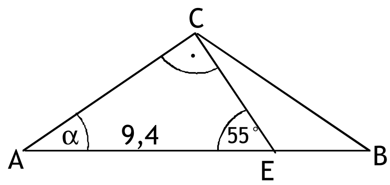
Für die Länge $\overline{BE}$ gilt: $\overline{BE} = \overline{AB} - 9{,}4$ cm (siehe Figur 1). Um die Länge $\overline{AB}$ berechnen zu können, muss man im gleichschenkligen Dreieck ABC zunächst die Höhe $\overline{CF}$ bezüglich der Grundseite $\overline{AB}$ einzeichnen (siehe Figur 2). Dadurch wird das Dreieck ABC in zwei kongruente Hälften geteilt. Für $\overline{AB}$ gilt: $\overline{AB} = 2\,\overline{AF}$.

Die Strecke $\overline{AF}$ kann im Dreieck AFC mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel α und die Strecke $\overline{AC}$ kennt (siehe Figur 2). Der Winkel α kann mit der Summe der Innenwinkel des Dreiecks AEC berechnet werden. $\overline{AC}$ erhält man im Dreieck AEC mit der Sinusfunktion (siehe Figur 3).

Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck AEC alle Seitenlängen und den fehlenden Winkel α berechnen. Außerdem sollten Sie im gleichschenkligen Dreieck ABC die Höhe auf die Grundseite $\overline{AB}$ einzeichnen und beachten, dass diese Höhe die Grundseite $\overline{AB}$ halbiert.*

Berechnung der Länge $\overline{BE}$:

Für die Länge $\overline{BE}$ gilt (siehe Figur 1): $\overline{BE} = \overline{AB} - 9{,}4$ cm



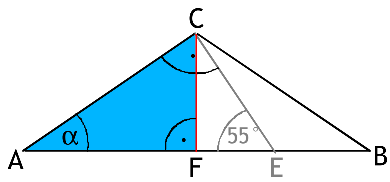
Figur 1

→ Berechnung der Länge $\overline{AB}$:

Da die Höhe $\overline{CF}$ das gleichschenklige Dreieck ABC in zwei kongruente Hälften teilt, gilt (siehe Figur 2):
$\overline{AB} = 2\,\overline{AF}$.

Für die Strecke $\overline{AF}$ gilt im Dreieck AFC:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$$



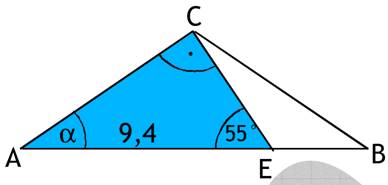
Figur 2

• Den Winkel α erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck AEC (siehe Figur 1):

$\alpha + 55^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \underline{\alpha = 35^\circ}$

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich

• Die Strecke $\overline{AC}$ kann im Dreieck AEC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Es gilt:



Figur 3

$$\sin 55^\circ = \frac{\overline{AC}}{9{,}4} \quad | \cdot 9{,}4$$

$$\Leftrightarrow \quad 7{,}70 = \overline{AC} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AC} = \underline{7{,}70\text{ cm}}$$

Einsetzen von $\alpha = 35^\circ$ und $\overline{AC} = 7{,}70$ cm in $\cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$ ergibt:

$$\cos 35^\circ = \frac{\overline{AF}}{7{,}70} \quad | \cdot 7{,}70$$

$$\Leftrightarrow \quad 6{,}31 = \overline{AF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AF} = \underline{6{,}31\text{ cm}}$$

Damit folgt für $\overline{AB} = 2\,\overline{AF}$: $\quad \mathbf{\overline{AB} = 12{,}62\text{ cm}}$

Und für die Länge $\overline{BE} = \overline{AB} - 9{,}4$ cm erhält man schließlich: $\mathbf{\overline{BE} = 3{,}22\text{ cm}}$

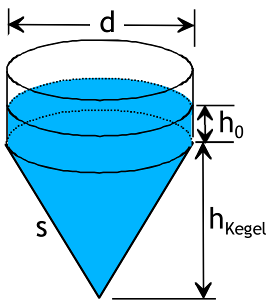
<u>Ergebnis:</u> Die Länge von $\overline{BE}$ ist $\underline{\mathbf{\overline{BE} = 3{,}22\text{ cm}}}$.

Aufgabe P3:

<u>Lösungsübersicht:</u>
Zunächst muss das gesamte Wasservolumen V_{Prisma} des quadratischen Prismas berechnet werden. Wenn man von diesem Volumen das Kegelvolumen abzieht, erhält man das zylinderförmige Wasservolumen V_Z, das den Zylinder oberhalb des Kegels teilweise ausfüllt. Die Summe zwischen dem Wasserstand h_0 im Zylinder und der Kegelhöhe h_{Kegel} ist dann der gesuchte Wasserstand (siehe Figur 1). Der Wasserstand h_0 im Zylinder kann durch Umstellen der entsprechenden Volumenformel für V_Z bestimmt werden. Zur Berechnung des Kegelvolumens benötigt man noch die Kegelhöhe h_{Kegel}, die mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden kann (siehe Figur 2).

<u>Berechnung des Wasserstands im zusammengesetzten Körper:</u>

Wenn man das gesamte Wasser des Prismas in den zusammengesetzten Körper umfüllt, gilt für die Höhe h* des gesuchten Wasserstands (siehe Figur 1):



Figur 1

$h^* = h_{Kegel} + h_0$, wobei h_0 der Wasserstand im Zylinder nach dem Umfüllen ist.

→ <u>Berechnung der Kegelhöhe h_{Kegel}:</u>

Die Kegelhöhe h_{Kegel} kann im markierten Dreieck der Figur 2 berechnet werden. Darin gilt der Satz des Pythagoras:

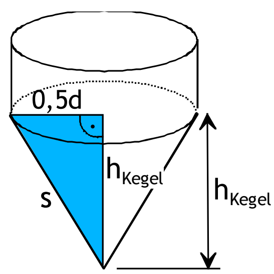
$$(0{,}5d)^2 + h_{Kegel}^2 = s^2$$

Mit d = 17,8 cm und s = 20,0 cm folgt:

$$79{,}21 + h_{Kegel}^2 = 400 \quad | -79{,}21$$

$$\Leftrightarrow \quad h_{Kegel}^2 = 320{,}79 \quad | \sqrt{\ }$$

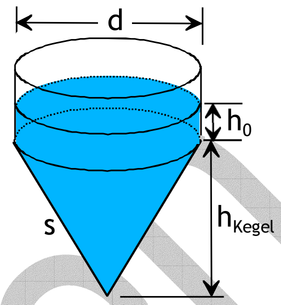
$$\Rightarrow \quad \underline{h_{Kegel} = 17{,}91\text{ cm}}$$



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich

→ <u>Berechnung des Wasserstands h_0 im Zylinder:</u>



Figur 3

Für das gesamte Wasservolumen V_{Prisma} gilt (siehe Formelsammlung):
$V_{Prisma} = a^2 \cdot h_{Pr}$

Mit a = 10 cm und h_{Pr} = 25 cm erhält man: $\mathbf{V_{Prisma} = 2500\ cm^3}$

Nach dem Umfüllen des Wassers gilt für das Wasservolumen V_Z im Zylinder: $V_Z = \pi \cdot (0{,}5d)^2 \cdot h_0$

Mit d = 17,8 cm erhält man: $\mathbf{V_Z = 248{,}85 \cdot h_0}$

Außerdem gilt für das Wasservolumen V_Z nach dem Umfüllen:
$V_Z = V_{Prisma} - V_{Kegel}$ bzw. $V_Z = 2500\ cm^3 - V_{Kegel}$

- Für das Kegelvolumen V_{Kegel} gilt (siehe Formelsammlung):

  $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi \cdot (0{,}5d)^2 \cdot h_{Kegel}$

  Mit d = 17,8 cm und h_{Kegel} = 17,91 cm (siehe oben) folgt:

  $V_{Kegel} = 1485{,}6\ cm^3$

Einsetzen in $V_Z = 2500\ cm^3 - V_{Kegel}$ ergibt: $V_Z = 1014{,}4\ cm^3$

Einsetzen von $V_Z = 1014{,}4\ cm^3$ in $V_Z = 248{,}85 \cdot h_0$ ergibt:

$1014{,}4 = 248{,}85 \cdot h_0 \quad | \ :248{,}85$

$\Leftrightarrow \quad 4{,}08 = h_0$ bzw. $\mathbf{h_0 = 4{,}08\ cm}$

Einsetzen von h_{Kegel} = 17,91 cm und h_0 = 4,08 cm in $h^* = h_{Kegel} + h_0$ ergibt schließlich die gesuchte Höhe des Wassers im zusammengesetzten Körper: **h*** = 21,99 cm ≈ **22,0 cm**

Ergebnis: Die Höhe des Wassers im zusammengesetzten Körper beträgt <u>**h* ≈ 22,0 cm**</u>.

Aufgabe P4:

<u>Prozentuale Abnahme des Wasserverbrauchs zwischen 1990 und 2010:</u>

Im Jahr 1990 betrug der Pro-Kopf-Wasserverbrauch 147 Liter pro Tag. Das ist der Grundwert G.
Im Jahr 2010 waren es nur noch 122 Liter pro Tag. Das ist der verringerte Grundwert G_-.

Einsetzen von G = 147 Liter und G_- = 122 Liter in die Formel $G_- = G \cdot q_-$ ergibt:

$122 = 147 \cdot q_- \quad | \ :147$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}83 = q_-$ bzw. $q_- = 0{,}83$

Mit $q_- = 1 - \frac{p}{100}$ folgt: **p % = 17,0 %**

<u>Ergebnis:</u> Der Pro-Kopf-Wasserverbrauch hat zwischen 1990 und 2010 um <u>**17,0 %**</u> abgenommen.

<u>Der tägliche Wasserverbrauch für die Körperpflege im Jahr 2015:</u>

Im Jahr 2015 betrug der Pro-Kopf-Wasserverbrauch 122 Liter pro Tag. Das ist der Grundwert G.
Der Grafik zufolge entfallen 35 % davon auf die Körperpflege. Das ist der Prozentsatz p %. Gesucht ist also der Prozentwert W; nämlich 35 % von 122 Liter. Man erhält: $W = \frac{35}{100} \cdot 122\,\text{Liter} = \mathbf{42{,}7\ Liter}$

<u>Ergebnis:</u> Im Jahr 2015 wurden täglich <u>**42,7 Liter**</u> Wasser pro Einwohner für die Körperpflege verbraucht.